SC.SUP.S.Pl.3.

31
5 E
19

Digitized by Google

Digitized by Google

ELEMENTA
MATHEMATICA

Digitized by Google

P. F. FORTUNATI
A BRIXIA

Ord. Min. Ref. Prov. Brixiæ Lect. Theol. Scriptoris Ord. & in Brixiana Academia Publ. Matheſeos & naturalis Philoſ. Profeſſoris

ELEMENTA MATHEMATICA

IN QUATUOR TOMOS DIGESTA.

TOMUS TERTIUS

Geometriam ſolidorum continens.

BRIXIÆ. CIↃ IↃCCXXXIX.
Typis JOANNIS-MARIÆ RIZZARDI.
SUPERIORUM FACULTATE.

Digitized by Google

Digitized by Google

INDEX LIBRORUM QUOS TOMUS TERTIUS COMPREHENDIT.

LIBER XI.
De ſectione, & geneſi ſolidorum.

LIBER XII.
De circulis ſphæræ.

LIBER XIII.
De ſimilitudine, & ratione ſolidorum.

LIBER XIV.
De ſolidorum dimenſione.

APPRO-

Digitized by Google

APPROBATIONES.

DE mandato Reverendiſſimi P. Felicis a Roma hujus Ciſmontanæ Reformatorum Familiæ V. Comiſs. Generalis, nos infraſcripti Lectores Theologi vidimus *Tomum III. Elementorum Mathematicorum R. P. Fortunati a Brixia hujus Reformatæ Provinciæ Brixiæ Alumni;* cumque nihil plane in eo nobis occurrerit, quod vel Catholicæ Fidei contrarium ſit, vel probis moribus adverſetur, illum non indignum judicamus, quominus in lucem prodeat, dummodo tamen ita iis quoque videatur, ad quos de jure ſpectat.

In quorum fidem &c.

Brixiæ die 8. Februarii 1739.

F. Proſper a Brixia Lect. Theol.

F. Bonaventura a Brixia Lect. Theol.

F. FELIX A ROMA STRICT. OBSERV. S. P. N. FRANCISCI, Lect. Emeritus, Sac. Congr. Indicis Conſultor, iterato Proc. Gefilis, & in hac Ciſmontana Reformator. Familia V. Comiſſ. Generalis, & humilis in Domino Servus.

Dilecto Nobis in Chriſto P. F. Fortunato a Brixia Lect. Theol., Script. Ordinis, noſtræ Ref. Prov. Brixiæ Alumno Salutem, & Seraphicam Benedictionem.

CUm juxta Apoſtolicas, noſtrique Ordinis Conſtitutiones liber, cui titulus: *Elementa Mathematica: Tomus Tertius* a te elaboratus ab idoneis Noſtræ Reformationis Cenſoribus, ad id ſpecialiter a Nobis deputatis, recognitus fuerit, & approbatus, Nos præſentium tenore, ac cum ſalutaris obedientiæ merito, tibi facultatem facimus, & impertimur, ut ſervatis aliàs de jure ſervandis, illud typis evulgare poſſis, & valeas.

Dat. Romæ ex noſtro Conventu S. Franciſci ad ripas Tyberis die 7. Martii 1739.

F. FELIX A ROMA V. Com. Gen.

L. ✱ S.

Reg. Stab. Brix.

De mandato P. S. Rmæ

F. Joannes Pius a Preſſano Secr. Gen.

NOI

Digitized by Google

NOI RIFORMATORI
DELLO STUDIO DI PADOVA.

AVendo veduto per la Fede di Reviſione, ed Approvazione del P. F. Tommaſo-Maria de Angelis Inquiſitore di Breſcia, nel Libro intitolato: *P. F. Fortunati a Brixia Ord. Min. Ref. Provinciæ Brixiæ, Elementa Mathematica Tomus tertius*; non v' eſſer coſa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Atteſtato del Segretario Noſtro, niente contro Principi, e buoni coſtumi, concedemo Licenza a Gian-Maria Rizzardi Stampatore in Breſcia, che poſſi eſſer ſtampato; oſſervando gli ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Pubbliche Librarie di Venezia, e di Padova.

Dat. 21. Marzo 1739.

[*Gio: Franceſco Moroſini Kav. Rif.*
[*Z. Pietro Paſqualigo Rif.*
[

Agoſtino Gadaldini Segret.

SPHAL.

Digitized by Google

SPHALMATA	CORRIGE

Elementorum Liber XI.

§. 10. l. 5. *incoſaedrum.*	*icoſaedrum*
§. 31. l. 3. *Lactus vero*	*Latus vero*
§. 91. *ad marg.* Fig. 9. Tab. 7.	Fig. 7. Tab. 7.
§. 113. l. 2. Duo	Dico
§. 117. *ad marg.* Fig. 8. Tab. 7.	Fig. 8. Tab. 8.
§. 126. l. 2. contra	centra.

Elementorum Liber XII.

§. 16. *ad marg.* Fig. 13. Tab. 7.	Fig. 13. Tab. 8.
§. 81. l. 18. communi arcui	communi arcu

Elementorum Liber XIII.

§. 22. l. 1. *eſt minor cateto*	*eſt major cateto*
§. 25. *ad marg.* Fig. 1. Tab. 8.	Fig. 1. Tab. 7.
§. 26. *ad marg.* Fig. 8. Tab. 8.	Fig. 8. Tab. 7.
§. 117. l. 6. ſummi	ſumi
§. 139. Theor. l. 2. *in ratione duplicata*	*in ratione triplicata*

Elementorum Liber XIV.

§. 50. Coroll. l. 3. *altitudo vero*	*baſis vero*
§. 79. l. *penul. Dem.* ſimul baſibus.	ſimul cum baſibus
§. 116. l. 1. *Dem.* theorematis XXI.	theorematis XXII.
§. 121. l. 2. *Reſol.* nec non ſegmenti	nec non valor ſegmenti

Cetera, quæ tibi occurrent, ſphalmata levioris momenti, non eſt, cur moreris, optime Lector.

ELE-

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM
LIBER XI.
De geneſi, & ſectione ſolidorum.

A Planis ad ſolida gradum facimus. Agemus itaque primo de *ſolidorum ſectione, & geneſi*; tum de *ſphæra circulis*; dein de *ſolidorum ratione*, & *ſimilitudine*; poſtremo de *eorum dimenſione*.

DEFINITIO I.

1. *Solidum*, quod *corpus Mathematicum* etiam dicitur, *eſt magnitudo ſecundum trinam dimenſionem, longitudinis ſcilicet, latitudinis, & profunditatis, extenſa, una, vel pluribus ſuperficiebus terminata*. In idea *corporis Mathematici* trina tantum dimenſio occurrit, ita nimirum, ut quodcunque corpus ſenſibile veniat ſub notione *corporis Mathematici*, ſi affectionibus omnibus, quæ in ipſo ſunt, neglectis, trina dumtaxat dimenſio in illo concipiatur.

DEFINITIO II.

2. *Angulus ſolidus eſt ille, qui continetur tribus ad minimum angulis planis ſimul penes duo ipſorum latera unitis, atque in* Fig. 1. Tab. VII *idem punctum*, quod ipſius anguli *apex* dicitur, *deſinentibus, quin tamen planam ſuperficiem conſtituant*. Hujuſmodi eſt angulus productus in A a tribus planis angulis BAD, BAC, CAD ſimul penes ipſorum latera unitis, atque commune punctum A habentibus, quin ex illorum unione plana ſuperficies conſurgat.

COROLLARIUM I.

3. Hinc *anguli plani, qui ſolidum angulum conſtituunt, ſimul ſumti debent eſſe minores quatuor rectis*. Etenim, ſi ſecus, plana ſuperficies ex illorum unione haberetur.

COROLLARIUM II.

4. *Duo anguli ſolidi erunt æquales inter ſe, ſi anguli plani, quibus continentur, fuerint numero, & magnitudine æquales, eodemque ordine inter ſe diſpoſiti*. Hoc enim ipſo illorum unus intra alterum poſitus perfecte ei congruet.

COROLLARIUM III.

5. Viciſſim *æquales anguli ſolidi planis angulis numero, & magnitudine æqualibus continentur*. Quandoquidem, ſi ſecus, anguli ipſi ſibi mutuo haudquaquam congruerent; ac proinde contra hypotheſim non eſſent inter ſe æquales.

DEFINITIO III.

Fig. 2. Tab. VII 6. *Ex ſolidis angulis ille vocatur rectus, qui tribus rectis angulis planis comprehenditur*. Sic rectus eſt ſolidus angulus pro-

productus in puncto C a tribus angulis planis BCD, BCF, DCF, quia quilibet horum trium angulorum eſt rectus.

COROLLARIUM.

7. *Omnes anguli ſolidi recti ſunt inter ſe æquales*. Omnes enim continentur angulis planis numero, & magnitudine æqualibus.

DEFINITIO IV.

8. *Angulus ſolidus obtuſus eſt ille, qui rectum ſuperat. Acutus vero ille, qui a recto deficit.*

DEFINITIO V.

9. Solidum vel planis ſuperficiebus totum clauditur, vel una curva ſuperficie continetur, vel plana ſimul, & curva ſuperficie comprehenditur. *Extrema igitur ſolidorum ſunt ſuperficies*, quemadmodum extrema planorum ſunt lineæ, & extrema linearum ſunt puncta.

DEFINITIO VI.

10. Ex corporibus, quæ planis dumtaxat ſuperficiebus terminantur, *illa dicuntur regularia, quæ planis regularibus, atque inter ſe æqualibus continentur, omneſque ipſorum anguli ſunt inter ſe æquales*. Corpora regularia ſunt *cubus, tetraedrum, octaedrum, dodecaedrum, & incoſaedrum*, quibus additur *ſphæra*, corpus inter omnia nobiliſſimum. *Cubus, tetraedrum, octaedrum, dodecaedrum*, & *icoſaedrum* corpora Platonica vocari ſolent, quod illis Plato in Timæo quinque corpora ſimplicia, *cœlum* videlicet, *ignem, aerem, aquam*, & *terram*, comparaverit. Cetera vero corpora ab his diverſa, quorum infinita plane ſunt genera, *irregularia* vocantur.

COROLLARIUM.

11. *Omnes anguli corporis regularis ſunt inter ſe æquales*' Planis namque angulis numero, & magnitudine æqualibus ſinguli continentur.

DEFINITIO VII.

12. *Pyramis eſt ſolidum terminatum pluribus, quam duobus triangulis planis rectilineis, ea ratione ſimul penes duo qualibet ipſorum latera unitis, ut ſpatium undique claudant, & eorum*
Fig. 1. *baſes figuram planam rectilineam*, quæ pyramidis *baſis* dicitur,
Fig. 3. Tab.VII. *conſtituant; omnium vero ipſorum vertices in unum punctum coeant*, quod ipſius pyramidis *apex*, ſeu *vertex* nuncupatur. Talis eſt ſolidum BADC, ſicuti etiam ſolidum EFGH, quorum alterum *pyramis trilatera*, alterum *pyramis quadrilatera* dicitur, quatenus nempe baſis BCD prioris figura plana trilatera eſt, tribuſque idcirco triangulis planis pyramis ipſa continetur; baſis vero KFGH poſterioris eſt figura plana quadrilatera, ipſaque propterea pyramis quatuor triangulis planis comprehenditur. Porro punctum A, in quo ſimul coeunt vertices omnium triangulorum pyramidem BADC terminantium, *vertex*, ſive *apex* pyramidis BADC vocatur, ſicuti etiam punctum E dicitur *vertex*, ſive *apex* pyramidis KFGHE.

COROLLARIUM.

13. *Quævis pyramis tot triangulis planis rectilineis terminatur, quot latera in ejus baſi numerantur.*

DEFINITIO VIII.

Fig. 3. Tab.VII. 14. *Axis pyramidis eſt recta linea ducta ab illius vertice in centrum baſis*. Ut ſi punctum M fuerit centrum baſis FGHK,

FGHK, recta EM erit axis pyramidis KFGHE.

DEFINITIO IX.

15. *Pyramis dicitur recta, ſi illius axis ad perpendiculum baſi inſtiterit*, cujuſmodi eſt pyramis KEGH. *Dicitur vero inclinata*, ſi illius *axis oblique ad baſim ſeſe habuerit*.

COROLLARIUM.

16. *Altitudo pyramidis recta diverſa non eſt ab illius axe*. Altitudo namque cujuslibet figuræ eſt recta ducta a vertice in baſim, eique ad perpendiculum incumbens (a).

DEFINITIO X.

17. *Priſma eſt ſolidum pluribus planis rectilineis comprehenſum, quorum duo ex adverſo æqualia ſunt, ſimilia, & parallela, reliqua vero ſunt parallelogramma.* Hujuſmodi ſunt duo ſolida AF, BH. Quandoquidem in utroque plana ex adverſo poſita, nimirum ABC, DEF, ſicuti etiam ACD, LGH, æqualia ſunt, ſimilia, & parallela, reliqua autem ſunt parallelogramma. Fig. 4. Fig. 5. Tab. 7.

COROLLARIUM.

18. *Tot parallelogrammis priſma quodcunque clauditur, quot latera ſunt in uno planorum ſibi ex adverſo poſitorum.*

DEFINITIO XI.

19. Si pro baſi priſmatis ſumatur unum ex illis planis, quæ ſibi mutuo in illo adverſantur, *illud priſma vocatur rectum, in quo omnia parallelogramma, quibus comprehenditur, ſunt rectangula*. Rectum videlicet erit priſma AF, quia paral- Fig. 4. Tab. 7.

(a) Lib. V. §. 14.

rallelogramma ADEB, BEFC, ADFC ſunt rectangula. Hoc enim ipſo ad perpendiculum ſuæ baſi incumbit.

COROLLARIUM I.

20. *Tot rectangulis priſma rectum continetur, quot ſunt latera in illius baſi.*

COROLLARIUM II.

21. *Altitudo priſmatis recti eſt latus unius ex illis rectangulis, quibus comprehenditur.*

DEFINITIO XII.

Fig. 2. Tab. 7. 22. *Parallalepipedum eſt ſolidum ſex parallelogrammis comprehenſum, quorum duo qualibet ex adverſo poſita, ſunt ſibi mutuo æqualia, ſimilia, & parallela.* Tale eſt ſolidum AF.

COROLLARIUM.

23. *Omne parallelepipedum eſt priſma, licet non omne priſma ſit parallelepipedum.* Quandoquidem omne parallelepipedum eſt hujuſmodi, ut duo ipſius plana ex adverſo poſita, ſint æqualia inter ſe, ſimilia, & parallela, cetera vero ſint parallelogramma. Verum priſma non exigit, quemadmodum parallelepipedum, ut parallelogramma ſint omnia plana, quibus comprehenditur.

DEFINITIO XIII.

Fig. 6. Tab. 7. 24. *Cubus eſt ſolidum ſex quadratis æqualibus, & quæ ex adverſo ſunt, ſibi mutuo parallelis comprehenſum.* Hujuſmodi eſt ſolidum BG.

COROLLARIUM I.

25. *Omnia cubi latera ſunt inter ſe æqualia.* Sunt enim latera quadratorum æqualium.

CO-

COROLLARIUM II.

26. *Omnes anguli cubi ſunt recti; atque adeo inter ſe æquales*. Etenim eorum quilibet tribus angulis rectis planis continetur.

COROLLARIUM III.

27. *Cubus eſt ſolidum regulare*. Terminatur enim planis regularibus, ſibi mutuo æqualibus, & ſimilibus, omneſque ipſius anguli ſunt æquales.

COROLLARIUM IV.

28. *Omnis cubus eſt parallelepipedum, quamvis non omne parallelepipedum ſit cubus*. Plana enim, quibus cubus continetur, ſunt parallelogramma (a), & quidem ſimilia (b), ex quibus duo quælibet ex adverſo ſunt parallela, & inter ſe æqualia, prout parallelepipedum exigit. Verum omnia ſunt quadrata, quod ad parallelepipedum non requiritur.

COROLLARIUM V.

29. *Altitudo cubi adæquat latus baſis ejuſdem*. Eſt enim latus unius ex illis quadratis, quibus cubus continetur, quæ omnia ſunt æqualia.

DEFINITIO XIV.

30. *Conus eſt ſolidum, quod circulo, tamquam baſi, & curva ſuperficie ex una parte in punctum tota deſinente continetur*, ſeu Fig. 7.
conus eſt ſolidum, quod determinatur a recta linea circa periphe- Tab. 7.
riam circuli revoluta, dum alterum illius extremum puncto extra illius circuli planum ſumpto, interim conſtanter hæret. Hujuſmodi

(a) § 24.
(b) Lib. IX. §. 3.

di eſt ſolidum BAD circulo BCD, & curva ſuperficie producta a recta AB circa peripheriam ipſius circuli BCD revoluta, fixo manente illius extremo A, comprehenſum.

DEFINITIO XV.

31. *Baſis coni eſt circulus, cui conus inſiſtit. Apex, ſeu vertex eſt punctum, in quod conus ipſe deſinit. Axis coni eſt recta*
Fig. 7. Tab. 7. *ducta ab illius vertice in baſeos centrum. Lactus vero eſt quæcunque recta linea ducta a vertice coni in peripheriam baſis.* Sic baſis coni BAD eſt circulus BCD. Apex punctum A. Axis recta AE. Latus recta AB, ſicuti etiam recta AD.

DEFINITIO XVI.

32. Si latera AB, AD coni BAD triangulum æquilaterum cum baſeos diametro BD conſtituant, *conus dicitur æqui-*
Fig. 7. Tab. 7. *laterus;* ſi conſtituant triangulum iſoſceles, *conus* dicitur *iſoſceles*; *ſcalenus* vero nuncupatur, ſi triangulum ſcalenum hujuſmodi rectæ efficiant.

DEFINITIO XVII.

33. *Ille conus vocatur rectus, cujus axis ad perpendiculum baſi incumbit; obliquus vero ille, cujus axis ad baſim inclinat.* Re-
Fig. 7. Tab. 7. Fig. 8. ctus nimirum eſt conus BAD; quia illius axis AE perpendicularis eſt baſis circulo BCD. Obliquus vero conus *bad*; quia illius axis *ae* ſuper baſeos circulum *bcd* oblique cadit.

COROLLARIUM.

34. *Altitudo coni recti diverſa non eſt ab illius axe.* Altitudo namque coni eſt recta perpendicularis ducta a vertice in baſim.

Digitized by Google

SCHOLION.

35. Conus rectus concipi poteſt oriri ex completa revolutione trianguli rectanguli circa alterum ex lateribus, quæ ſunt circa angulum rectum, immotum conſiſtens. Sic conus rectus BAD habetur ex revolutione trianguli rectanguli BEA circa quieſcens latus AE, ita nimirum ut conica ſuperficies determinetur a rotante hypotenuſa AB, & baſeos circulus BCD ex revolutione lateris BE. Fig. 7. Tab. 7.

DEFINITIO XVIII.

36. *Cylindrus eſt ſolidum duobus circulis æqualibus, & parallelis, & curva ſuperficie in illorum peripherias deſinente comprehenſum*. Tale eſt ſolidum AD terminatum duobus circulis AB, CD æqualibus, & parallelis, curvaque ſuperficie ACDB deſinente in ipſorum circulorum peripherias; quæ proinde concipi poteſt veluti genita ex tali motu rectæ lineæ AC circa peripherias circulorum AB, CD, ut ſibi ſemper parallela exiſtat. Fig. 9. Tab. 7.

DEFINITIO XIX.

37. *Baſis cylindri eſt circulus, cui ille incumbit. Axis eſt recta linea conjungens centra circulorum, quibus cylindrus terminatur. Latus vero eſt recta axi parallela, utriuſque circuli peripheriam tangens*. Sic baſis cylindri AD eſt circulus CD. Axis recta EF. Latus vero tam recta AC, quam recta BD.

DEFINITIO XX.

38. *Cylindrus rectus eſt ille, cujus axis perpendicularis eſt circulo baſeos. Obliquus vero, cujus axis in circulum baſeos oblique cadit*. Rectus videlicet eſt cylindrus AD, obliquus vero cylindrus *ad*; quia axis EF ad perpendiculum inſiſtit baſi CD, non ſic autem *ef* baſi *cd*. Fig. 9. Fig. 10 Tab.

COROLLARIUM.

39. *Altitudo cylindri recti ab illius axe diverſa non eſt.*

SCHOLION.

Fig. 9. Tab. 7. 40. Oritur cylindrus rectus ex completa revolutione rectanguli circa unum ex ſuis lateribus plane immobile. Videlicet cylindrus rectus AD oritur ex revolutione rectanguli AEFC circa latus EF omnino quieſcens, ita nimirum ut ex revolutione laterum AE, CF emergant circuli AB, CD, quibus cylindrus terminatur, & ex revolutione lateris AC cylindrica ſuperficies ACDB.

DEFINITIO XXI.

Fig. 11. Tab. 7. 41. *Tetrahedrum eſt ſolidum quatuor triangulis planis rectilineis regularibus, & inter ſe æqualibus terminatum*, cujuſmodi eſt ſolidum ACB.

DEFINITIO XXII.

Fig. 12. Tab. 7. 42. *Octaedrum eſt ſolidum octo triangulis rectilineis regularibus, & inter ſe æqualibus comprehenſum*, ut ſolidum DEF.

DEFINITIO XXIII.

Fig. 13. Tab. 7. 43. *Dodecaedrum eſt ſolidum, quod duodecim pentagonis æqualibus, & regularibus continetur*, ut ſolidum GHK.

DEFINITIO XXIV.

Fig. 14. Tab. 7. 44. *Icoſaedrum eſt ſolidum viginti triangulis regularibus; atque inter ſe æqualibus terminatum*, ut ſolidum LMN.

DE-

Digitized by Google

DEFINITIO XXV.

45. *Polyedrum eſt ſolidum pluribus figuris planis rectilineis comprehenſum*. Eſt enim polyedrum in genere ſolidorum, quod polygonum in genere planorum.

DEFINITIO XXVI.

46. *Sphæra eſt ſolidum una tantum curva ſuperficie comprehenſum, in cujus ſolidi area punctum eſt, a quo omnes rectæ lineæ ductæ in illam curvam ſuperficiem ſunt inter ſe æquales*. Tale eſt ſolidum ABCD curva ſuperficie undique terminatum. Æquales namque ſunt rectæ lineæ EG, EF, omneſque aliæ, quæ a puncto E in ſuperficiem ABCD cadere poſſunt. Fig. 15. Tab. 7.

Geneſis ſphęræ.

47. Sphęra producitur a ſemicirculo rotante circa quieſcentem diametrum, integramque revolutionem complente. Sic ſphęra ABCD oritur ex completa revolutione ſemicirculi BAD circa quieſcentem diametrum BD. Hinc ſphęra definitur ab Euclide lib. XI. Elementorum, *cum ſemicirculi manente diametro, ſemicirculus circumductus in idem revolvitur, unde cępit circumduci*. Fig. 16. Tab. 7.

COROLLARIUM I.

48. Cum ſemicirculus BAD ex tot concentricis ſemiperipheriis circularibus conſurgat, quot in illius radio BE, centro excepto, puncta numerantur (a), *ſoliditas ſphærę ABCD concipi poteſt veluti conſurgens ex tot ſphæricis ſuperficiebus ſibi mutuo concentricis, quot ſunt puncta, excepto centro, in radio BE ſemicirculi genitoris BAD, atque adeo etiam ipſius ſphæra*. Quę-

B 2 libet

(a) Lib. IX. §. 48.

libet enim ex illis ſemiperipheriis, quę ſemicirculi genitoris aream conſtituunt, in illa circa diametrum BD revolutione ſphæricam ſuperficiem producit.

COROLLARIUM II.

49. Quemadmodum ſoliditas ſphæræ ABCD oritur ex completa revolutione ſemicirculi BAD circa diametrum immobilem BD, *ita ejus ſphæræ ſuperficies naſcitur ex completa revolutione ſemiperipheriæ BAD circa eandem diametrum BD.*

SCHOLION.

50. Menſura rotationis ſemicirculi BAD circa immotam diametrum BD, unde efficitur ſphæra ABCD, eſt peripheria circuli per centrum ipſius ſphæræ tranſeuntis, atque adeo in illa maximi. Hujuſce enim circuli peripheria, cum ſit major peripheriis omnium aliorum circulorum ipſius ſphæræ, certa hoc ipſo, & immutabilis eſt apud omnes, prout ad menſuram requiritur.

DEFINITIO XXVII.

51. *Centrum ſphæræ eſt punctum ſumtum in illius area, a quo omnes rectæ lineæ ductæ in ſphæræ ſuperficiem, ſunt inter ſe æqua-*
Fig. 15 Tab. 7. *les*. Ut ſi omnes rectæ lineæ, quæ a puncto E ſphæræ ABCD cadunt in illius ſuperficiem, fuerint inter ſe æquales, punctum E erit centrum ipſius ſphæræ ABCD.

COROLLARIUM I.

52. *Centrum ſphæræ eſt punctum in illius medio exiſtens*. Ab illo enim ſingula ſphæricæ ſuperficiei puncta æqualiter diſtant.

CO-

COROLLARIUM II.

53. Hinc *planum per ſphæræ centrum tranſiens ſphæram ipſam biſariam dividit*.

DEFINITIO XXVIII.

54. *Diameter ſphæræ eſt recta quæcunque linea tranſiens per centrum ſphæræ, & utrinque ad illius ſuperficiem terminata*. Sic recta BD eſt diameter ſphæræ ABCD. Fig. 15. Tab. 7.

DEFINITIO XXIX.

55. *Radius ſphæræ* qui illius etiam *ſemidiameter* dicitur, *eſt qualibet recta linea a ſphæræ centro in illius ſuperficiem ducta*, ut rectæ EG, EF in ſphæra ABCD.

COROLLARIUM I.

56. *Omnes ejuſdem ſphæræ radii ſunt inter ſe æquales*. Omnes enim illæ rectæ lineæ ſunt æquales inter ſe, quæ a centro in ſuperficiem cadunt (a).

COROLLARIUM II.

57. *Omnes diametri ejuſdem ſphæræ ſunt æquales*. Sunt enim inter ſe, ut radii (b).

COROLLARIUM III.

58. *Diameter ſemicirculi genitoris eſt etiam diameter ſphæræ; atque adeo etiam radius ejuſdem ſemicirculi eſt radius ipſius ſphæræ.*

DE-

(a) §. 51.
(b) Lib. I. §. 127.

libet enim ex illis ſemiperipheriis, quę ſemicirculi genitoris aream conſtituunt, in illa circa diametrum BD revolutione ſphæricam ſuperficiem producit.

COROLLARIUM II.

49. Quemadmodum ſoliditas ſphæræ ABCD oritur ex completa revolutione ſemicirculi BAD circa diametrum immobilem BD, *ita ejus ſphæræ ſuperficies naſcitur ex completa revolutione ſemiperipheriæ BAD circa eandem diametrum BD.*

SCHOLION.

50. Menſura rotationis ſemicirculi BAD circa immotam diametrum BD, unde efficitur ſphæra ABCD, eſt peripheria circuli per centrum ipſius ſphæræ tranſeuntis, atque adeo in illa maximi. Hujuſce enim circuli peripheria, cum ſit major peripheriis omnium aliorum circulorum ipſius ſphæræ, certa hoc ipſo, & immutabilis eſt apud omnes, prout ad menſuram requiritur.

DEFINITIO XXVII.

51. *Centrum ſphæræ eſt punctum ſumtum in illius area, a quo omnes rectæ lineæ ductæ in ſphæræ ſuperficiem, ſunt inter ſe æquales.* Ut ſi omnes rectæ lineæ, quæ a puncto E ſphæræ ABCD cadunt in illius ſuperficiem, fuerint inter ſe æquales, punctum E erit centrum ipſius ſphæræ ABCD.

Fig. 15 Tab. 7.

COROLLARIUM I.

52. *Centrum ſphæræ eſt punctum in illius medio exiſtens.* Ab illo enim ſingula ſphæricæ ſuperficiei puncta æqualiter diſtant.

CO-

COROLLARIUM II.

53. Hinc *planum per ſphæræ centrum tranſiens ſphæram ipſam biſariam dividit.*

DEFINITIO XXVIII.

54. *Diameter ſphæræ eſt recta quæcunque linea tranſiens per centrum ſphæræ, & utrinque ad illius ſuperficiem terminata.* Sic recta BD eſt diameter ſphæræ ABCD. Fig. 15. Tab. 7.

DEFINITIO XXIX.

55. *Radius ſphæræ* qui illius etiam *ſemidiameter* dicitur, *eſt qualibet recta linea a ſphæræ centro in illius ſuperficiem ducta*, ut rectæ EG, EF in ſphæra ABCD.

COROLLARIUM I.

56. *Omnes ejuſdem ſphæræ radii ſunt inter ſe æquales.* Omnes enim illæ rectæ lineæ ſunt æquales inter ſe, quæ a centro in ſuperficiem cadunt (a).

COROLLARIUM II.

57. *Omnes diametri ejuſdem ſphæræ ſunt æquales.* Sunt enim inter ſe, ut radii (b).

COROLLARIUM III.

58. *Diameter ſemicirculi genitoris eſt etiam diameter ſphæræ; atque adeo etiam radius ejuſdem ſemicirculi eſt radius ipſius ſphæræ.*

DE-

(a) §. 51.
(b) Lib. I. §. 127.

DEFINITIO XXX.

59. *Hemiſphærium eſt ſolidum dimidiata ſphæræ ſuperficie, & plano per illius centrum ducto comprehenſum.* Planum quippe, quod per ſphæræ centrum tranſit, ſphæram ipſam bifariam dividit (a).

Geneſis hemiſphærii.

60. Oritur hemiſphærium ex quadrante circuli revoluto circa radium. Ut enim ſphæra a rotante ſemicirculo circa diametrum, ita hemiſphærium a rotante quadrante circa radium fiat neceſſe eſt.

DEFINITIO XXXI.

61. *Sector ſphæræ eſt ſolidum comprehenſum ſub circulari portione ſuperficiei ſphæricæ, & ſub curva ſuperficie, quæ initium ſumens a curva linea circularem ſuperficiei ſphæricæ portionem terminante, in ipſius ſphæræ centrum deſinit.*

Geneſis ſectoris ſphærici.

62. Ut notio ſectoris ſphærici clarior fiat, illius geneſis conſideranda eſt. Producitur itaque ſector ſphæricus ex completa revolutione ſectoris circularis, quemadmodum hemiſphærium ex revolutione quadrantis, circa quieſcentem ejuſdem radium.

COROLLARIUM I.

63. Cum area ſectoris circuli ex tot arcubus ſimilibus, ſibique mutuo concentricis conſurgat, quot, centro excepto, ſunt

(a) §. 53.

Digitized by Google

ſunt puncta in illius radio (a), *ſector ſphæricus ſpectari poteſt veluti compoſitus ex tot portionibus circularibus ſuperficierum ſphæricarum ſibi mutuo concentricarum, atque centrum verſus continuo decreſcentibus, quot, excepto centro, habentur puncta in illius radio.* In illa namque revolutione ſectoris circularis quilibet arcus circuli ſectorem ipſum conſtituens, circularem ſphæricæ ſuperficiei portionem producit.

COROLLARIUM II.

64. *Portiones circulares ſuperficierum ſphæricarum, quæ ſphæræ ſectorem conſtituunt, ſunt ſibi mutuo ſimiles, eandem ſcilicet proportionem habent omnes ad integram ſuperficiem ſphæricam, cujus earum quælibet eſt portio.* Similes namque ſunt arcus genitores, omneſque hujuſmodi ſphæricarum ſuperficierum portiones eadem revolutione, qua ipſæ itidem integræ ſuperficies fiunt, producuntur.

DEFINITIO XXXII.

65. *Segmentum ſphæræ eſt ipſius ſphæræ portio, plano ſphæram ipſam extra centrum dividente, & parte ſuperficiei ipſius ſphæræ comprehenſa.* Segmenta nimirum ſphæræ ABCD ſunt duæ ipſius portiones HAM, HCM, quarum altera ſub plano HM extra centrum ipſius ſphæræ traducto, & ſub portione HAM ſuperficiei ſphæricæ ABCD, altera ſub eodem plano, & ſub portione HCM ejuſdem ſuperficiei continetur. Fig. 15. Tab 7.

COROLLARIUM.

66. Cum planum per ſphæræ centrum tranſiens ſphæram ipſam bifariam dividat (b), *illud ſphæræ ſegmentum erit majus, in quo ſphæræ centrum reperitur.*

Gene-

(a) Lib.IX. §. 49. (b) §. 53.

Digitized by Google

Geneſis ſegmenti ſphærici.

67. Sphæræ ſegmentum producitur a ſemiſegmento circulari revoluto circa radium, qui biſariam, atque adeo ad angulos rectos, chordam arcus totius ſegmenti circularis, totumque ipſum arcum dividat. Segmentum ſcilicet ſphæriricum HCM gignitur ex revolutione ſemiſegmenti circularis MXC circa radium EC biſariam, atque ad rectos angulos dividentem tum chordam HM totius arcus HCM, tum ipſum arcum. (Fig. 15. Tab. 7.)

DEFINITIO. XXXIII.

68. *Illæ rectæ lineę ęqualiter a ſphęrę centro diſtare dicuntur, in quas rectæ perpendiculares inter ſe æquales cadunt a centro ipſius ſphęrę. Illa vero dicitur a centro ſphęrę magis diſtare, in quam cadit major recta perpendicularis ab illius centro.* Memoria repetantur, quæ diximus de hujuſmodi lineis in circulo.

DEFINITIO XXXIV.

69. *Sectio ſolidi dicitur illa figura plana, quæ, facta ſectione ipſius ſolidi ope plani, in ejus partibus diviſis de novo conſpicitur.* Sic figura *abc* eſt ſectio pyramidis BAD diviſæ a plano per puncta *a*, *b*, *c* traducto. (Fig. 1. Tab. 7.)

LEMMA I.

Cylindrus eſt priſma infinitorum laterum.

70. Eſto cylindrus ACDB. Dico, ipſum non differre a priſmate infinitis parallelogrammis latitudinis infinite parvę comprehenſnm.

Demonſtratio.

Spectetur priſma AGH. Manifeſtum eſt, priſma AGH ad cylindrum magis accedere, & fieri cylindro ſimile, quo magis multiplicantur latera baſeos FGHKL, eodem manente perimetro, atque adeo quo plura ſunt parallelogramma, quibus ipſum priſma comprehenditur, ita nimirum ut, ſi numero infinita ſint latera in baſi polygona FGHKL, eaque propterea infinite parva, & infinita idcirco ſint parallelogramma, quibus ipſum priſma terminatur, hujuſmodi priſma nullatenus diſcerni poſſit a cylindro, quemadmodum baſis ipſius priſmatis tunc a circulo haudquaquam diſtinguitur (a). Ergo cylindrus quoque ſpectari poteſt veluti priſma infinitis parallelogrammis comprehenſum. Fig. 9. Fig. 5. Tab. VII

COROLLARIUM.

71. *Cylindrica idcirco ſuperficies componitur ex infinitis parallelogrammis latitudinis infinite parvę, penes duo ipſorum latera ſimul unitis.*

LEMMA II.

Conus eſt pyramis infinitorum laterum.

72. Spectetur conus BAD. Dico, ipſum non eſſe diverſum a pyramide infinitis triangulis baſim infinite parvam habentibus terminata.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum præcedenti. Conſtat enim, pyramidem eo magis ad conum accedere, quo plura ſunt latera baſeos, eodem manente perimetro; ac proinde quo magis multiplicantur triangula, quibus pyramis continetur, ita nimirum, Fig. 7. Tab. VII

(a) Lib. IX. §. 149.

ut ſi latera baſeos ſint infinita, ac per conſequens magnitudinis infinite parvæ, ipſaque idcirco pyramis infinitis triangulis baſim infinite parvam habentibus comprehendatur, pyramis hujuſmodi a cono diſcerni nullo modo queat. Ergo conus quicunque conſiderari, ac ſumi poteſt veluti pyramis infinitis triangulis baſim infinite parvam habentibus comprehenſa.

COROLLARIUM.

73. *Superficies conica conſurgit ex infinitis triangulis baſim habentibus infinite parvam, ſimul penes latera unitis, atque in unum commune punctum deſinentibus, quod eſt coni vertex.*

THEOREMA I.

Sectiones priſmatis baſi parallelæ ſunt baſi ſimiles, & æquales.

Fig. 5. Tab. 7. 74. Priſma AFH ſecetur plano parallelo baſi FGHKL ſitque *abcde* illius ſectio. Dico, hanc eſſe ſimilem, & æqualem baſi FGHKL.

Demonſtratio.

Cum enim mutua ſectio duorum planorum ſit recta linea (a), tot rectis continebitur ſectio *abcde*, quot planis comprehenditur priſma AFH, atque adeo quot rectis lineis illius baſis terminatur (b). Rurſus cum rectæ GH, *cd* ſint parallelæ (c), ob paralleliſmum ſcilicet ſectionis *abcde*, & baſis FGHKL, ipſæque rectæ GH, *cd* inter latera parallela DH, CG contineantur (d), duæ rectæ GH, *cd* erunt inter ſe æquales (e), ſicuti eandem ob cauſam etiam duæ FG, *bc*, nec non duæ FL, *ba*, duæ quoque LK, *ae*, & etiam duæ KH, *ed*. Igitur duæ figuræ planæ FGHKL, *abcde* ſunt

(a) Lib. VIII. §. 24.
(b) §. 18.
(c) Lib. VIII. §. 26.
(d) Lib. VI. §. 8.
(e) Ibidem §. 20.

ſunt inter ſe mutuo æquilateræ. Porro cum rectæ FH, *bd* æquales ſint inter ſe, & parallelæ, eadem ſcilicet ratione, qua, ut modo vidimus, æquales ſunt, & parallelæ duæ GH, *cd*, duo triangula FGH, *bcd* habebunt latera æqualia, alterum alteri, ſicuti etiam baſes. Ergo anguli quoque FGH, *bcd*, qui æqualibus lateribus continentur, æquales erunt (a). Eodem modo oſtendam, æquales eſſe etiam angulos GFL, *cba*, ſicuti etiam angulos FLK, *bae*, angulos quoque LKH, *aed*, nec non angulos KHG, *edc*. Igitur duæ figuræ planæ FGHKL, *abcde* ſunt inter ſe mutuo non tantum æquilateræ, verum etiam æquiangulæ; ac proinde ſibi mutuo ſimiles (b), & æquales (c). Sectiones itaque priſmatis &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

75. Si priſma trilateram baſim habeat, ut priſma AEF, oſtenſo, ſectionem baſi parallelam *abc* æquilateram eſſe ipſi baſi, patet, eam eſſe eidem baſi æqualem (d) atque æquales cum illa angulos habere, alterum alteri (e); ac proinde illi eſſe omnino ſimilem (f). Tab. 7. Fig. 4.

COROLLARIUM II.

Si priſma ſecetur plano baſi parallelo, ejus ſegmenta erunt priſmata.

76. Ut ſi priſma AE ſecetur plano *abc* baſi DEF parallelo, utrumque ſegmentum A*b*, *a*F erit priſma. Commune ſiquidem planum *abc* ſimile, & æquale eſt planis ABC, DEF, ipſiſque per hypotheſim eſt parallelum. Fig. 4. Tab. 7.

(a) Lib. V. §. 32.
(b) Lib. IX. §. 2.
(c) Lib. V. §. 37.
(d) Ibidem §. 84.
(e) Ibidem §. 85.
(f) Lib. IX. §. 46.

Digitized by Google

COROLLARIUM II.

Elementa priſmatis ſunt omnia ſibi mutuo ſimilia, & inter ſe æqualia.

77. Elementa ſiquidem priſmatis ſunt planæ ſuperficies, quæ ſectionibus baſi parallelis determinantur. Hæc autem ſunt omnes ſibi mutuo ſimiles, & inter ſe æquales (a). Ergo &c.

Geneſis priſmatis.

78. Oritur propterea priſma quodcunque ex parallela elevatione figuræ planæ rectilineæ, itaut illius centrum rectam lineam in hujuſmodi motu deſcribat, ipſaque figura eadem ſemper maneat. Videlicet priſma AEF conſurgit ex parallela elevatione trianguli DEF, & priſma BGH ex parallela elevatione pentagoni FGHKL, quam elevationem metitur geniti priſmatis altitudo.

Fig. 4. Fig. 5. Tab. 7.

COROLLARIUM I.

79. *Hinc priſma quodcunque componitur ex tot planis ſuperficiebus ſibi ſuperimpoſitis, baſi ſimilibus, & æqualibus, nec non ipſi baſi, ſibique mutuo parallelis, quot in illius altitudine puncta numerantur.* Etenim in parallela plani genitoris elevatione, ex qua priſma conſurgit, toties ſumitur ipſum planum, quot ſunt puncta in altitudine ipſius priſmatis.

COROLLARIUM II.

80. *Conſiderari idcirco poteſt priſma quodcunque, veluti factum ex ductu baſis in illius altitudinem.* Genitor ſiquidem planum a priſmatis baſi diverſum non eſt.

THEO-

(a) § 74.

THEOREMA II.

Sectiones cylindri baſi parallelæ ſunt circuli circulo baſis æquales.

81. Cylindrus AD ſecetur plano baſi CD parallelo, ſitque MN illius ſectio. Dico, hanc eſſe circulum circulo baſis CD æqualem.

Demonſtratio.

Cylindrus AD eſt priſma infinitorum laterum (a). Omnes autem ſectiones priſmatis baſi parallelæ ſunt ipſi baſi ſimiles, & æquales (b). Ergo ſectio quoque MN cylindri AD ſimilis, & æqualis erit baſi CD. Hęc autem eſt circulus (c). Ergo circulus quoque erit ſectio MN, & quidem circulo CD baſeos æqualis. Sectiones itaque cylindri &c. quod erat oſtendendum. Fig. 9. Tab. 7.

COROLLARIUM I.

Si cylindrus ſecetur plano baſi parallelo, utrumque illius ſegmentum erit cylindrus.

82. Segmenta nimirum AN, NC cylindri AD ſecti plano MN baſi CD parallelo, erunt cylindri. Sectio namque MN eſt circulus circulo baſis CD æqualis, & per hypotheſim utrique circulo AB, CD parallelo. Fig. 9. Tab. 7.

COROLLARIUM II.

Elementa cylindri ſunt circuli circulo baſis æquales.

83. Elementa namque cylindri determinantur ſectionibus baſi parallelis. Ge-

(a) §. 70.
(b) §. 74.
(c) §. 17.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Geneſis cylindri.

84. Cylindrus conſurgit ex parallela elevatione circuli, ea quidem lege, ut centrum circuli genitoris rectam lineam in hujuſmodi motu deſcribat, ipſe vero circulus neque augeatur, neque decreſcat. Ut ſi circulus CD ita moveri concipiatur ab F in E, ut ſibi ſemper ſit parallelus, ejuſque centrum F rectam FE deſcribat, cylindrus fiet AD. Hanc porro elevationem circuli genitoris metitur ipſius cylindri altitudo.

Fig. 9. Tab. VII.

COROLLARIUM I.

85. *Cylindrus propterea componitur ex tot circulis circulo baſis æqualibus, eique, nec non inter ſe mutuo parallelis, quot ſunt puncta in illius altitudine.*

COROLLARIUM II.

86. *Quamobrem cylindrus quicunque ſpectari poteſt, veluti factum ex multiplicatione circuli baſeos per altitudinem.*

HYPOTHESIS.

87. Si ergo altitudo priſmatis, aut cylindri ponatur $= a$, ejuſque baſis $= bd$, ſoliditas priſmatis, & cylindri erit $= abd$. Etenim *abd* exprimit factum, quod naſcitur multiplicando quantitatem *bd* per quantitatem *a*.

THEOREMA III.

Sectiones pyramidis baſi parallelæ ſunt ſimiles ipſi baſi.

88. Pyramis ABD ſecetur plano baſi BCDE parallelo, ſitque *bcde* illius ſectio. Dico, hanc eſſe ſimilem baſi BCDE.

De-

Demonſtratio.

Cum enim pyramis ABD tot planis contineatur, quot ſunt latera baſis BCDE (a), & ſectio duorum planorum ſit recta linea (b), tot rectis terminabitur ſectio *bcde*, quot rectis continetur baſis BCDE. Rurſus cum planum ſecans ſit parallelum baſi, rectæ DE, *de* erunt parallelæ, ſicuti etiam rectæ CD, *cd* (c). Erit ergo DE ad *de*, & CD ad *cd*, ut AD ad A*d* (d); ac proinde DE. *de* = CD. *cd* (e), & *alternando de*. *cd* ∺ DE. CD (f). Eodem modo oſtendam, eſſe *dc*. *cb* ∺ DC. CB. & *cb*. *be* ∺ CB. BE, nec non *be*. *ed* ∺ BE. ED. Ductis porro rectis *ce*, CE, cum plana BCDE, *bcde* ſint parallela, ipſæque rectæ *ce*, CE, in eodem plano conſiſtant ACE, erunt inter ſe parallelæ; cumque recta CE ſit baſis trianguli CAE, & recta *ce* duo ipſius latera dividat AC, AE, erit CE. *ce* ∺ AC. A*c* (g), adeoque CD. *cd* ∺ CE. *ce*, cum ſit etiam CD. *cd* ∺ AC. *ac*. Quamobrem erit quoque *dc*. *ce* ∺ DC.CE (h). Duo igitur triangula CED, *ced* habent latera ſibi mutuo proportionalia, ſuntque propterea æquiangula (i), angulus nimirum *cde* æqualis eſt angulo CDE, qui proportionalibus lateribus continentur. Eodem modo demonſtrabitur angulus *bcd* æqualis angulo BCD, angulus *ebc* angulo EBC, & angulus *bed* angulo BED. Duo itaque plana BCDE, *bcde* ſunt inter ſe mutuo æquiangula, habentque latera circa æquales angulos proportionalia. Ergo ſunt ſibi mutuo ſimilia (*k*). Sectiones igitur pyramidis &c. quod erat oſtendendum. Fig. 17. Tab. I.

SCHOLION.

89. Si pyramis ſit trilatera, ut ABCD, ex eo tantum patet

(a) §. 13.
(b) Lib. VIII. §. 24.
(c) Ibidem §. 26.
(d) Lib. IX. §. 59.
(e) Lib. I. §. 76.
(f) Ibidem §. 125.
(g) Lib. IX. §. 59.
(h) Lib. I. §. 125.
(i) Lib. IX. §. 70.
(K) Ibid. §. 1.

Fig. 1. Tab. 7. patet, ſectionem *abc* baſi BCD parallelam, ſimilem eſſe ipſi baſi, quod tria latera trianguli *abc* proportionalia ſint tribus lateribus trianguli BCD (a).

COROLLARIUM.

Omnia elementa pyramidis ſunt baſi ſimilia.

90. Determinantur enim ſectionibus baſi parallelis.

THEOREMA IV.

Sectiones coni baſi parallelæ ſunt circuli.

91. Conus BAD ſecetur plano baſi BCD parallelo, ſitque MN illius ſectio. Dico, hanc eſſe circulum.

Demonſtratio.

Cum enim conus ſit pyramis infinitorum laterum (b), ſectio MN coni BAD baſi BCD parallela, erit ſimilis ipſi baſi BCD (c). Hæc autem eſt circulus (d). Ergo circulus Fig. 2. Tab. 7. quoque erit ſectio MN. Itaque ſectiones &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Coni elementa ſunt circuli.

92. Elementa ſiquidem coni determinantur ſectionibus baſi parallelis.

THEO-

(a) Lib. IX. §. 71.
(b) §. 72.
(c) §. 88.
(d) §. 11.

THEOREMA V.

Sectiones pyramidis baſi parallelæ decreſcunt in ratione duplicata imminutæ altitudinis.

93. Duo plana FGHK, MNPQ ſint ſectiones pyramidis ABD parallelæ illius baſi BCDE, adeoque etiam inter ſe. Altitudo vero ipſius pyramidis ſit recta A*e*. Dico, ſectiones hujuſmodi decreſcere in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis, videlicet ſectionem FGHK eſſe ad ſectionem MNPQ in ratione *duplicata* altitudinis A*c* ad altitudinem A*a*. Fig. 11. Tab. 7.

Caſus I.

Cadat primo altitudo A*e* ipſius pyramidis intra illius baſim.

Demonſtratio.

Secetur pyramis ipſa plano A*ezx*, in quo ipſius altitudo reperiatur, ſitque *ab* ſectio plani MNPQ, *cd* ſectio plani FGHK, & A*f* ſectio plani ADE. Cum igitur mutua duorum planorum ſectio ſit recta linea (a), & plana FGHK, MNPQ ſint per hypotheſim inter ſe parallela, parallelæ erunt rectæ *cd*, *ab* (b), ſicuti etiam rectæ HK, PQ. Quamobrem erit A*d*. A*b* $=$ AH. AP (c). Eſt autem eandem ob cauſam A*c*. A*a* $=$ A*d*. A*b*. Ergo erit quoque A*c*. A*a* $=$ AH. AP. Conſtat porro, eſſe HK. PQ $=$ AH. AP (d). Ergo erit ſimiliter A*c*. A*a* $=$ HK. PQ (e). Manifeſtum porro eſt, duo plana FGHK, MNPQ eſſe inter ſe in ratione *duplicata* laterum HK, PQ (f); cum ipſa plana ſint ſimilia, eorumque latera homologa ſint duo HK, PQ. Ergo planum FGHK erit ad planum MNPQ

(a) Lib. VIII. §. 24.
(b) Ibidem §. 26.
(c) Lib. IX. §. 57.
(d) Ibidem §. 59.
(e) Lib. I. §. 76.
(f) Lib. IX. §. 170.

in ratione quoque *duplicata* altitudinis A*c* ad altitudinem A*a*.

Caſus II.

Fig. 19. Tab. 7. Modo altitudo pyramidis ABD ſit in uno ipſius plano triangulari ADE, nimirum altitudo ſit recta A*f*. Dico, ſectionem FGHK eſſe ad ſectionem MNPQ in ratione *duplicata* altitudinis A*d* ad altitudinem A*b*.

Demonſtratio.

Etenim iisdem poſitis, cum ſit A*d*. A*b* = AH. AP (a), ob parallelismum ſcilicet rectarum HK, PQ, ſitque HK. PQ = AH. AP (b), erit quoque A*d*. A*b* = HK. PQ (c). Sunt autem duo plana ſimilia FGHK, MNPQ in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum HK, PQ (d). Ergo duo ipſa plana erunt ſimiliter in ratione *duplicata* altitudinis A*d* ad altitudinem A*b*.

Caſus III.

Altitudo demum datæ pyramidis cadat extra illius baſim, altitudo nimirum pyramidis ABD ſit recta AZ; altitudo Fig. 1. Tab. 8. ſectionis FGHK ſit recta A*n*, & altitudo ſectionis MNPQ ſit recta A*m*. Dico, ſectionem FGHK eſſe ad ſectionem MNPQ in ratione *duplicata* altitudinis A*n* ad altitudinem A*m*.

Demonſtratio.

Quandoquidem iisdem poſitis, cum ſegmenta *cd*, *ab* ſint parallela, inter ſe quoque parallelæ erunt rectæ *cn*, *am*. Quamobrem erit A*n* ad A*m*, ut A*d* ad A*b* (e), adeoque etiam ut HK ad PQ, cum ſcilicet oſtenſum fuerit, eſſe HK. PQ = A*d*. A*b*. Sunt autem duo plana FGHK, MNPQ

(a) Lib IX. §. 57.
(b) Ibidem §. 59.
(c) Lib. I. §. 76.
(d) Lib. IX. §. 170.
(e) Ibidem §. 57.

MNPQ in ratione *duplicata* laterum HK, PQ. Ergo erunt quo que in ratione *duplicata* altitudinis *An* ad altitudinem *Am*. Itaque ſectiones pyramidis &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Elementa pyramidis decreſcunt in ratione duplicata imminutæ altitudinis.

94. Cum enim elementa pyramidis determinentur ſectionibus baſi parallelis, ſicuti hujuſmodi ſectiones decreſcunt in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis, in eadem quoque ratione pyramidis elementa minuuntur.

Geneſis pyramidis.

95. Pyramis oritur ex tali motu plani rectilinei, ut ſibi ſemper ſit parallelum, continuo uniformiter decreſcat in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis ipſius pyramidis, ejuſque centrum rectam lineam deſcribat. Conſurgit nimirum pyramis ABD ex parallela elevatione figuræ planæ Fig. 11. rectilineæ BCDE, ita tamen ut continuo uniformiter mi- Tab. 7. nuatur in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis *Ae* ipſius pyramidis, atque ipſius figuræ centrum *e* rectam *e* A in hujusmodi motu deſcribat. Hanc autem elevationem decreſcentis plani metitur altitudo ipſius pyramidis. Patet ex natura elementorum, quibus pyramidem conſtare diximus.

COROLLARIUM I.

96 *Pyramis componitur ex tot planis rectilineis baſi ſimilibus, ſibi mutuo, atque baſi parallelis, continuo uniformiter apicem verſus decreſcentibus, quot in illius altitudine puncta numerantur.* Patet ex geneſi ipſius pyramidis.

COROLLARIUM II.

97. Hinc *pyramis conſiderari poteſt, veluti factum ex ductu figuræ planæ rectilineæ, ſive baſis ipſius pyramidis continuo uniformiter decreſcentis, in altitudinem.*

THEOREMA VI.

Si conus ſecetur plano per verticem ad baſim traducto, ſectio erit triangulum rectilineum.

Fig. 20. Tab. 7. 98 Conus BAD ſecetur plano, quod tranſeat per verticem A, ejuſque baſim BCD dividat. Dico, hujuſmodi ſectionem BAD, vel EAF eſſe triangulum rectilineum.

Demonſtratio.

Hæc enim ſectio tribus rectis lineis AB, BD, DA, vel AE, EF, FA comprehenſa eſt. Nam duæ BD, EF ſunt communes ſectiones planorum ſecantium BAD, EAF, & baſis BCD, quæ ſunt lineæ rectæ (a). Duæ vero AB, AD, ſicuti etiam duæ AE, AF ſunt communes ſectiones conicæ ſuperficiei, atque eorundem planorum; ac proinde ſunt rectæ lineæ congruentes illi rectæ, ex qua, dum movetur circa peripheriam circuli BCD, conica ipſa ſuperficies BAD producitur (b). Ergo ſectiones BAD, EAF ſunt triangula plana rectilinea. Itaque ſi conus &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Sectio per axim coni æquilateri eſt triangulum æquilaterum; coni iſoſcelis eſt triangulum iſoſceles; & coni ſcaleni eſt triangulum ſcalenum.

99. In ſectione ſiquidem coni, quæ plano per illius axim tra-

(a) Lib. VIII. §. 24. (b) §. 30.

traducto perficitur, recta ex ſectione baſeos determinata per illius centrum tranſit. Quamobrem ſectio per axim coni æquilateri erit *triangulum æquilaterum*; coni iſoſcelis erit *triangulum iſoſceles*; & coni ſcaleni erit *triangulum ſcalenum* (a).

THEOREMA VII.

Sectiones coni cujuſcunque baſi parallelæ decreſcunt in ratione duplicata imminutæ altitudinis.

100. Conus BAD ſecetur plano baſi BCD parallelo, ſitque circulus MN illius ſectio. Dico, ſectionem MN minui ſupra Fig. 7.
baſim BCD in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis, vi- Tab. 7.
delicet baſim BCD eſſe ad ſectionem MN in ratione *duplicata* altitudinis AE ad altitudinem AZ.

Demonſtratio I.

Conus quicunque eſt pyramis infinitorum laterum (b). Sectiones autem pyramidis baſi parallelæ decreſcunt in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis (c). Ergo in eadem quoque ratione minuuntur ſectiones coni, quæ ſunt baſi parallelæ.

Demonſtratio II.

I.

Conus BAD ſit rectus. Secetur autem plano per verticem A, & centrum E baſis BCD traducto, atque adeo per centrum Z ſectionis, ſive circuli MN tranſeunte (d). Itaque ſectiones MZN, BED planorum circularium MN, BCD erunt rectæ lineæ (e); cumque hujuſmodi rectæ tranſeant per centra circulorum MN, BCD ob hypotheſim, erunt ipſorum circulorum diametri (f). Sunt autem rectæ BD,

MN

(a) §. 32.
(b) §. 72.
(c) §. 93.
(d) §. 31.
(e) Lib. VIII. §. 24.
(f) Lib. VII. §. 7.

Digitized by Google

MN parallelæ inter ſe (a), ob parallelismum ſcilicet planorum MN, BCD. Ergo, cum ſectio BAD ſit triangulum (b), duo triangula BAD, MAN erunt ſimilia (c), eorumque latera BD, MN, utpote eidem angulo BAD oppoſita, erunt homologa (d). Erit ergo altitudo AE trianguli BAD ad altitudinem AZ trianguli MAN, ut eſt baſis, ſive diameter BD circuli BCD ad baſim, ſive ad diametrum MN circuli MN (e). Circulus autem BCD eſt ad circulum MN in ratione *duplicata* diametri BD ad diametrum MN (f). Ergo circulus BCD erit ad circulum MN in ratione quoque *duplicata* altitudinis AE ad altitudinis AZ; adeoque &c.

II.

Eſto modo conus obliquus *bad*, cujus altitudo ſit recta *ag*. Secetur autem plano per verticem *a*, & centrum *e* baſis *bcd*, ut ſupra, traducto. Sectio *bad* erit triangulum (g), duo-
Fig. 1. Tab. 7. que triangula *bad*, *man* erunt ſimilia ob parallelismum rectarum, ſive ſectionum *bd*, *mn*, quemadmodum ſupra demonſtravimus, eorumque latera homologa erunt ipſæ rectæ *bd*, *mn*, diametri nimirum baſis *bd*, & ſectionis *mn*. Erit igitur altitudo *ag* trianguli *bad* ad altitudinem *ax* trianguli *man*, ut eſt latus *bd*, ſive diameter baſis *bcd* ad latus *mn*, ſive ad diametrum ſectionis conicæ baſi parallelæ *mn* (h). Eſt autem baſis *bcd* ad ſectionem *mn* in ratione *duplicata* diametri *bd* ad diametrum *mn* (i). Ergo baſis *bcd* erit ad ſectionem *mn* in ratione itidem *duplicata* altitudinis *ag* ad altitudinem *ax*. Itaque ſectiones coni &c. quod erat oſtendendum.

CORO-

(a) Lib. VIII. §. 26.
(b) § 98.
(c) Lib. IX. §. 65.
(d) Ibidem §. 47.
(e) Ibid. §. 78.
(f) Ibid. §. 186.
(g) §. 98.
(h) Lib. IX. §. 78.
(i) Ibid. §. 186.

Digitized by Google

COROLLARIUM.

Coni elementa decreſcunt in ratione duplicata imminutæ altitudinis.

101. Elementa ſiquidem coni ſunt circuli baſi paralleli.

Geneſis coni.

102. Oritur conus ex tali motu circuli, ut ſibi ſemper ſit parallelus, continuo uniformiter minuatur in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis, ejuſque centrum rectam lineam a coni axe minime diverſam deſcribat. Sic conus ABCD conſurgit ex parallela elevatione circuli BCD continuo uniformiter decreſcentis in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis AE, & quidem tali lege, ut centrum E circuli genitoris in axe AE ipſius coni continuo reperiatur. Patet ex natura elementorum, quibus conus ipſe componitur. Fig. 7. Tab. 7.

COROLLARIUM I.

103. *Conſurgit propterea conus quicunque ex tot circulis baſi, ſibique mutuo parallelis, continuo apicem verſus uniformiter decreſcentibus, quot in illius altitudine puncta numerantur.*

COROLLARIUM II.

104. *Hinc conus conſiderari poteſt veluti factum ex multiplicatione circuli baſis, continuo uniformiter in ratione duplicata imminutæ altitudinis decreſcentis, per ipſius altitudinem.*

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA VIII.

Si duæ pyramides ejuſdem generis ſecentur planis, quæ ſint earundem baſibus parallela, atque ipſarum altitudines proportionaliter dividant, ſectiones hujuſmodi erunt directe inter ſe, ut ipſarum pyramidum baſes.

105. Duæ pyramides trilateræ ABCD, *abcd* ſecentur planis EFK, *efk*, quæ parallela ſint baſibus BCD, *bcd*, Fig. 2. earumque altitudines AN, *an* proportionaliter dividant Fig. 3. Tab. I. in punctis M, *m*, ita nimirum ut ſit *an* ad *am*, ut eſt AN ad AM. Dico, ſectionem EFK eſſe ad ſectionem *efk*, ut eſt baſis BCD ad baſim *bcd*.

Demonſtratio.

Cum ex hypotheſi ſectiones EFK, *efk* ſint baſibus BCD, *bcd* parallelæ, erit baſis BCD ad ſectionem EFK in ratione *duplicata* altitudinis AN ad altitudinem AM, quemadmodum etiam baſis *bcd* ad ſectionem *efk* in ratione *duplicata* altitudinis *an* ad altitudinem *am* (a). Poſuimus autem, rationem altitudinis *an* ad altitudinem *am* eandem eſſe cum ratione altitudinis AN ad altitudinem AM. Ergo ratio quoque baſis *bcd* ad ſectionem *efk* eadem erit cum ratione baſis BCD ad ſectionem EFK, erit nempe BCD . EFK $::$ *bcd*. *efk*. Igitur *alternando* erit quoque EFK . *efk* $::$ BCD. *bcd* (b), ſive ſectio EFK ad ſectionem *efk*, ut eſt baſis BCD ad baſim *bcd*. Itaque ſi duæ pyramides &c. quod erat oſtendendum.

CORO-

(a) §. 100.
(b) Lib. I. §. 125.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Si duæ pyramides ejuſdem generis æqualium baſium, ſed inæqualium altitudinum ſecentur planis, quæ ſint illarum baſibus parallela, & altitudines proportionaliter dividant, eorum ſectiones erunt æquales.

106. Æquales nimirum erunt ſectiones EFK, *efk* pyramidum ABCD, *abcd*, ſi baſes BCD, *bcd* æquales fuerint, & altitudo AN ad altitudinem AM, ut altitudo *an* ad altitudinem *am*. Cum enim ſectiones EFK, *efk* futuræ hoc ipſo ſint inter ſe, ut baſes BCD, *bcd*, quemadmodum baſes per hypotheſim ſunt æquales, ipſæ quoque ſectiones erunt æquales. Fig. 2. Fig. 3. Tab. 8.

COROLLARIUM II.

Si duæ pyramides ejuſdem generis æqualium baſium, & altitudinum ad eandem altitudinem planis, quæ ſint earum baſibus parallela, dividantur, earum ſectiones erunt æquales.

107. Ut ſi pyramides triangulares *abcd*, ABCD æquales habentes baſes *bcd*, BCD, & altitudines *an*, AN ſecentur ad æquales altitudines *Am*, AM planis *efk*, EFK, quæ ſint earum baſibus parallela, ſectiones ipſæ *efk*, EFK erunt æquales. Hujuſmodi namque ſectiones ſunt directe inter ſe, ut baſes. (a) Fig. 3. Fig. 4. Tab. 8.

(a) §. 105.

THEOREMA IX.

Si duo coni ſecentur planis, quæ eorum baſibus ſint parallela, ipſorumque altitudines proportionaliter dividant, ſectiones erunt directe, ut ipſæ baſes.

Fig. 5. Fig. 6. Tab. 1. 108. Coni ABC, MNO ſecentur planis DE, QR, quæ ſint baſibus BC, NO parallela, altitudines vero AL, MP proportionaliter dividant, ſit nimirum MP ad MY, ut AL ad AK. Dico, ſectiones DE, QR eſſe directe inter ſe, ut baſes BC, NO.

Demonſtratio I.

Conus eſt pyramis infinitorum laterum (a). Ergo quemadmodum in pyramidibus, ita in conis ſectiones, quæ fiunt planis eorum baſibus parallelis, ipſorumque altitudines proportionaliter dividentibus, ſunt directe inter ſe, ut ipſæ baſes.

Demonſtratio II.

Cum enim conicæ ſectiones baſi parallelæ ſint circuli (b), iique decreſcant in ratione duplicata imminutæ altitudinis (c), erit baſis NO, ad ſectionem QR, ut eſt baſis BC ad ſectionem DE (Poſita eſt enim altitudo MP ad altitudinem MY, ut eſt altitudo AL ad altitudinem AK.) Ergo *alternando* erit ſectio DE ad ſectionem QR, ut eſt baſis BC ad baſim NO (d). Itaque ſi duo coni &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) §. 78.
(b) §. 91.
(c) § 100.
(d) Lib. I. §. 125.

COROLLARIUM I.

Si duorum conorum baſes fuerint æquales, & plana baſibus parallela, quibus ſecantur, eorum altitudines inæquales proportionaliter diviſerint, eorum ſectiones erunt æquales.

109. Ut ſi baſis BC coni ABC æqualis fuerit baſi NO coni MNO, & inæquales altitudines AL, MP proportionaliter ſectæ fuerint in punctis K, Y planis DE, QR, quæ ſint eorum baſibus parallela, ſectiones ipſæ DE, QR erunt æquales. Sunt enim ſectiones hujuſmodi directe inter ſe, ut ipſæ baſes. Fig. 5. Fig. 6. Tab. 8.

COROLLARIUM II.

Si duo coni æqualium baſium, & altitudinum ad eandem altitudinem planis eorum baſibus parallelis ſecti fuerint, eorum ſectiones erunt æquales.

110. Si nimirum coni ABD, *abd* æqualium baſium BCD, *bcd*, & altitudinum AE, *ag* ad eandem altitudinem *ax* ſecti fuerint planis MN, *mn*, quæ ſint eorum baſibus parallela, ſectiones ipſæ MN, *mn* erunt æquales. Circuli namque ſectionum MN, *mn* ſunt directe inter ſe, ut circuli baſium BCD, *bcd*. Fig. 7. Fig. 8. Tab. 7.

THEOREMA X.

Si cylindrus ſecetur plano, quod vel tranſeat per centra circulorum, quibus terminatur, vel illius axi parallelum exiſtat, ſectio erit parallelogrammum.

I.

111. Cylindrus ACDB ſecetur plano, & quidem primo,

E 2 quod

Fig. 7. Tab. I. quod per centra *m*, *n* tranſeat circulorum AB, CD, quibus cylindrus terminatur, ſitque illius ſectio ACDB. Dico, hanc eſſe parallelogrammum.

Demonſtratio.

Mutua ſectio plani ſecantis, & circuli AB, ſicuti etiam circuli CD, eſt recta linea (a). Hujuſmodi quoque ſunt ſectiones cylindricæ ſuperficiei, & plani, ut ex geneſi ipſius ſuperficiei eſt manifeſtum. Sectio itaque cylindri quatuor rectis AC, CD, DB, BA terminatur. Duæ autem rectæ AB, CD æquales ſunt (b), & parallelæ (c). Ergo duæ quoque AC, BD æquales erunt (d), & parallelæ (e); atque ideo ſectio ACDB erit parallelogrammum (f).

I I.

112. Secetur modo cylindrus ACDB plano *acdb*, quod ſit ipſius axi *mn* parallelo. Dico, ſectionem quoque *acdb* eſſe parallelogrammum.

Demonſtratio.

Etenim hujuſmodi quoque ſectio *acdb* rectis lineis terminatur. Id enim eodem modo oſtendetur, quo idipſum oſtenſum eſt de ſectione ACDB. Duæ enim *ab*, *cd* æquales ſunt inter ſe, (g), utpote æqualiter diſtantes per hypotheſim a centro ſui circuli A*a*B, C*d*D *reſpective*. Suntque inſuper parallelæ; cum paralleli ſint circuli A*a*B, C*d*D, in eodemque plano ſecante ambæ conſiſtant. Ergo duæ quoque *ac*, *bd* æquales erunt inter ſe (h), & parallelæ (i); ac proinde ſectio *acdb* erit parallelogrammum (k). Si ergo cylin-

(a) Lib. VIII. §. 24.
(b) §. 36.
(c) Lib. VIII. §. 26.
(d) Lib. V. §. 75.
(e) Ibidem §. 88.
(f) Lib. VI. §. 8.
(g) Lib. VII. §. 60.
(h) Lib. V. §. 75.
(i) Ibidem §. 88.
(K) Lib. VI §. 8.

lindrus ſecetur plano &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XI.

Omnia cujusvis cylindri latera ſunt ejuſdem axi æqualia.

113. Recta AC ſit latus cylindri A*d*, cujus axis ſit recta *mn*. Duo, rectas AC, *mn* eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

A centro *m* circuli A*b*B ad extremum A ducatur radius *m*A, & a centro *n* circuli C*d*D ad extremum C radius *n*C. Quoniam igitur duæ rectæ AC, *mn* ſunt parallelæ (a), erunt in eodem plano (b); ac proinde in eodem itidem plano erunt duæ *m*A, *n*C. Duæ autem *m*A, *n*C ſunt æquales ob æqualitatem circulorum A*b*, C*d*, & parallelæ inter ſe ob eorundem circulorum paralleliſmum (c). Ergo duæ quoque rectæ AC, *mn* ſunt inter ſe æquales (d). Itaque omnia cujuſvis cylindri &c. quod erat oſtendendum. Fig. 7. Tab. 8.

COROLLARIUM.

Omnia cujuſvis cylindri latera ſunt inter ſe æqualia.

114. Cum enim omnia ſint æqualia ejuſdem axi, inter ſe quoque erunt æqualia (e).

THEOREMA XII.

Polyedrum quodcunque reſolvi poteſt in tot pyramides, quot ſunt illius plana.

115. Eſto polyedrum ABC. Dico, ipſum in tot pyramides

(a) §. 37.
(b) Lib. VIII. §. 18.
(c) Ibidem §. 26.
(d) Lib. V. §. 75.
(e) Synop. Alg. §. 259.

des reſolvi poſſe, quot ſunt plana AL*a*, A*ac*, A*c*N. &c, quibus terminatur.

Demonſtratio.

Etenim ſi ex puncto in illius area ſumto ducantur rectæ ad apices A, L, B, *a*, *b* M &c. ſolidorum omnium angulorum, quos plana ipſa conſtituunt, perſpicuum eſt, tot hinc Fig. 14. Tab. 7. pyramides deſignari, quot ſunt ipſa plana, omneſque hujuſmodi pyramides ſimul ſumtas polyedrum ipſum æquare (a). Ergo &c. Itaque polyedrum &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XIII.

Unius ſphæræ unicum eſt centrum.

116. Punctum E ſit centrum ſphæræ ABCD. Dico, nullum aliud punctum in ipſa ſphæra ſumi poſſe, quod ſit illius centrum.

Demonſtratio.

Fig. 15. Tab. 7. Coincidit cum demonſtratione theorematis 1. lib. VII., ut enim omnes radii circuli, ita omnes ſphæræ radii ſunt inter ſe æquales (b).

THEOREMA XIV.

Si radius ſphæræ rectam lineam in ſphæra extra illius centrum ductam ad perpendiculum ſecuerit, biſariam illam ſecabit. Et viciſſim, ſi biſariam rectam ipſam ſecuerit, ad perpendiculum illi incumbet.

117. Radius K*b* ſphæræ AGB ad perpendiculum, ſive ad re-

(a) Syn. Algeb. §. 256. (b) §. 56.

rectos angulos dividat rectam AB extra illius centrum K cadentem. Dico, rectam AB biſariam ab ipſo radio dividi. Theod. l. 1. p. 22
Viciſſim vero ad rectos angulos rectam ipſam AB ab eodem radio ſecari, ſi biſariam ab eodem diviſa fuerit.

Demonſtratio.

Eadem eſt quoad utramque partem cum demonſtratione Fig. 8. Tab. VII
theorematis 3. lib. VII.

THEOREMA XV.

In ſphæra æquales rectæ lineæ æqualiter ab illius centro diſtant, & quæ æqualiter ab illius centro diſtant, ſunt æquales.

118. In ſphæra AGHB ſint duæ rectæ æquales AB, EF. Fig. 8.
Dico, eas æqualiter diſtare ab illius centro K. Viciſſim Tab 8.
vero eas æquales eſſe inter ſe, ſi eadem fuerit utriuſque diſtantia ab ipſo centro.

Demonſtratio.

Utraque pars demonſtratur eodem modo, quo oſtenſum eſt theorema 11. lib. VII.

THEOREMA XVI.

Recta in ſphæra, quæ per centrum tranſit, eſt omnium maxima. Aliarum vero propinquior centro remotiore major eſt.

119. In ſphæra AGHB quamplures habeantur rectę lineę CD, EF, GH, quarum CD tranſeat per centrum K ipſius Fig. 8.
ſphæræ; aliarum vero recta EF proximior ſit centro K, Tab. 8.
quam recta GH. Dico, rectam CD eſſe omnium maximam, rectam vero EF majorem eſſe recta GH.

De-

Demonſtratio.

Coincidit quoad utramque partem cum demonſtratione theorematis 12. lib. VII.

COROLLARIUM I.

Diameter ſphæræ maxima eſt omnium rectarum, quæ in ipſa ſphæra duci poſſunt.

120. Sola enim diameter per ſphæræ centrum tranſit (a).

COROLLARIUM II.

Maxima rectarum, quæ in ſphæra duci poſſunt, per illius centrum tranſit.

121. Etenim ſi ſecus, recta per centrum tranſiens non eſſet omnium maxima.

THEOREMA XVII.

Si ſphæra planum tangat, & a centro ipſius ſphæræ ad punctum contactus recta ducatur, erit ipſi plano perpendicularis.

122. Sphæra ABC tangat planum FG in puncto B, ad quod a centro D ipſius ſphæræ ducatur recta DB. Dico, rectam DB plano FG ad perpendiculum incumbere.

Demonſtratio.

Fig. 9. Tab. 8. Coincidit cum demonſtratione theorematis *6.* lib. VII. Enimvero, ſi recta DB non eſt perpendicularis plano FG, per-

(a) §. 54.

perpendicularis ſit ipſi plano recta DE. Manifeſtum eſt autem, rectam DE majorem eſſe recta DB, cum ſegmentum D*a* ipſius DE adequet rectam DB (a). Ergo recta perpendicularis DE non eſt minima omnium rectarum, quæ a puncto D in planum FG cadere poſſunt. Hoc autem fieri nequit (b). Igitur recta DE non eſt plano FG perpendicularis, eandemque ob cauſam nulla alia diverſa a recta DB. Si ergo ſphæra &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Sphæra tangens planum in uno dumtaxat puncto ipſum tangit.

123. Etenim ſi ſecus, plures rectę lineę ab eodem puncto in planum cadentes, eidem plano ad perpendiculum incumberent, quod omnino repugnat (c).

COROLLARIUM II.

Sphæra exterius ſphæram tangens in uno tantum puncto ipſam tangit.

124. Non enim poteſt ſphæra AB tangere ſphæram CD in duobus ſimul punctis *m*, *a*, quin utraque in illis ſimul punctis tangat planum EF, ut eſt manifeſtum. Fig. 10. Tab. 1.

SCHOLION.

125. Ex eo, quod ſphærę, & plani contactus in uno dumtaxat fiat puncto, ratio repetenda eſt, cur ſphæra ſuper planum apprime politum conſiſtens, ad ictum vel leviſſimum quoquoverſus moveatur.

(a) §. 56.
(b) Lib. VIII. §. 16.
(c) Ibidem §. 15.

Digitized by Google

THEOREMA XVIII.

Recta conjungens centra duarum ſphærarum ſeſe mutuo tangentium tranſit per punctum mutui contactus.

126. Duæ ſphæræ AB, CD ſeſe mutuo exterius tangant in puncto *a*. Harum autem ſphærarum contra *z*, *y* jungantur recta linea. Dico, hanc tranſire per punctum contactus *a*.

Demonſtratio.

Si enim fieri poteſt, hujuſmodi recta tranſeat extra punctum mutui contactus, ſitque *xmy*. Ab utroque autem centro *x*, *y* ad punctum *a* ducantur rectæ *xa*, *ya*, & per idem punctum *a* tranſeat planum EF, quod in eodem puncto tangat utramque ſphæram AB, CD. Quoniam igitur utraque *ya*, *xa* perpendicularis eſt plano EF(a) perpendicularis quoque erit rectæ EF in eodem plano poſitæ (b), ac proinde recti erunt anguli E*ay*, E*ax*(c). Ergo duæ *xa*, *ya* ſunt in directum poſitæ(d) ſeu unam eandemque rectam lineam conſtituunt *xay*. Recta autem poſita eſt etiam linea *xmy*. Igitur duæ rectæ *xay*, *xmy* ſpatium concludunt. Id porro fieri nequit (e). Ergo linea *xmy* non eſt recta, eademque ratione nulla alia, quæ ducta a centro *x* ad centrum *y* tranſeat extra punctum contactus *a*. Recta itaque conjungens &c. quod erat oſtendendum.

Fig. 10. Tab. I.

THEO-

(a) §. 122.
(b) Lib. VI'I. §. 2.
(c) Lib. III. §. 23.
(d) Ibidem §. 49.
(e) Lib. IV. §. 7.

THEOREMA XIX.

Si ſphera planum tangat, & a puncto contactus recta intra ipſam ſphæram excitetur plano perpendicularis, erit in illa centrum ipſius ſphærę.

127. Sphæra ABC tangat planum FG in puncto B, a quo intra ipſam ſphæram excitetur recta perpendicularis BD. Dico, rectam BD tranſire per centrum ipſius ſphæræ.

Demonſtratio.

Si enim fieri poteſt, centrum ſphæræ ſit extra ipſam perpendicularem BD, ſitque illud punctum *b*. Ducta ergo a centro *b* ad punctum contactus B recta *b*B, hæc erit plano FG perpendicularis (a). Eidem autem plano etiam recta BD poſita eſt perpendicularis. Ergo duæ rectæ *b*B, BD ſunt ſimul plano FG perpendiculares. Id porro repugnat (b). Ergo punctum *b* non eſt centrum ſphæræ ABC, & eandem ob cauſam nullum aliud extra rectam BD. Recta igitur BD tranſit per centrum ſphæræ ABC; atque adeo ſi ſphæra &c. quod erat oſtendendum. Fig. 9. Tab. 1.

(a) §. 122.

(b) Lib. VIII. §. 14.

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM
LIBER XII.

De circulis ſphæræ.

EA circulorum ſphæræ ſymptomata hoc in libro demonſtramus, quorum cognitio ad illorum intelligentiam neceſſaria eſt, quæ de *ſphæra mundi*, deque *aſtrorum motibus* in Aſtronomia traduntur.

DEFINITIO I.

1. *Axis ſphæræ eſt recta linea per illius centrum ducta, & utrinque ad ejuſdem ſuperficiem terminata, circa quam penitus*
Fig. 15. *quieſcentem ſphæra rotari intelligitur*. Ut ſi ſphæra ABCD re-
Tab. 7. voluatur circa rectam BD per illius centrum traductam, ac interim omnino quieſcentem, recta BD erit axis ipſius ſphæræ ABCD.

COROLLARIUM.

2. *Axis ſphæræ eſt etiam illius diameter. Verum non omnis diameter ſphæræ axis dici poteſt. Axis* enim, quemadmodum diameter, per ſphæræ centrum tranſit, & utrinque in illius ſuperficiem deſinit. At ſphæra non circa quamcumque diametrum, ſed circa unam tantum revolvitur.

DEFINITIO II.

3. *Poli ſphæræ*, qui illius etiam *cardines* vocantur, *ſunt puncta extrema axis*. Ut ſi *axis* ſphæræ ABCD ſit recta BD,

BD, *poli* ipſius ſphæræ erunt duo puncta B, D.

COROLLARIUM.

4. *Poli ſphæræ ſunt duo puncta ſumta in illius ſuperficie, ſibi mutuo ex diametro oppoſita, atque ad motum ſphæræ penitus immobilia*. Sunt enim extrema *axis*, qui per centrum tranſit, & ad motum ſphæræ omnino quieſcit.

DEFINITIO III.

5. *Circuli ſphæræ dicuntur illi, quorum peripheria in ipſius ſphæræ ſuperficie reperitur*. Hujuſmodi ſunt circuli BFDE, GH in ſphæra ABCD. Fig. 11. Tab. 1.

DEFINITIO IV.

6. *Polus circuli in ſphæra deſcripti eſt punctum ſumtum in ſuperficie ſphæræ, a quo omnes rectæ ad illius peripheriam ductæ, ſunt inter ſe æquales*. Ut ſi rectæ AB, AD, omneſque aliç, quæ duci poſſunt a puncto A in peripheriam circuli BFD, fuerint æquales, punctum A erit *polus* circuli BFD. Eadem ratione alter ejuſdem circuli *polus* erit punctum C, ſi rectç BC, CD, quemadmodum etiam ceteræ omnes a puncto C ductæ in peripheriam ipſius circuli BFD, æquales inter ſe fuerint. Fig. 11. Tab. 1.

COROLLARIUM I.

7. *Polus circuli in ſphęra poſiti eſt illud punctum ſumtum in ſuperficie ſphæræ, ex quo, veluti centro, ipſius circuli peripheria in ſphæræ ſuperficie deſcripta eſt.*

COROLLARIUM II.

8. *Poli ſphæræ erunt etiam poli circuli in ea deſcripti, ſi omnes rectç ductæ a polis ſphærç in peripheriam ipſius circuli, fuerint in-* Fig. 11. Tab. 1.

ter

ter ſe æquales. Nimirum ſi puncta A, C fuerint *poli* ſphæræ ABCD, erunt etiam *poli* circulorum GH, BFD, ſi rectæ AG, AH * GC, CH æquales inter ſe fuerint, quemadmodum etiam rectæ AB, AD*CB, CD.

DEFINITIO V.

Fig. 11. Tab. 8. 9. *Axis circuli in ſphæra deſcripti eſt recta ducta ab uno in alterum polum ipſius circuli*. Ut ſi puncta A, C fuerint *poli* circuli GH, recta AC erit illius *axis*.

COROLLARIUM I.

10. *Si poli circuli in ſphæra deſcripti diverſi non fuerint a polis ſphæræ, axis ſphæræ erit etiam axis ipſius circuli*. Neque enim poſſunt eſſe iidem *poli*, niſi idem quoque ſit utriuſque *axis*.

COROLLARIUM II.

11. *Si axis circuli in ſphæra ſit etiam axis ipſius ſphæræ, iidem quoque erunt utriuſque poli*. Sunt enim *poli* extrema *axis*.

COROLLARIUM III.

12. *Idem eſt axis omnium circulorum ſphæræ, quibus iidem ſunt poli.* Quippe *axis* eſt recta ducta a *polo* ad *polum*.

COROLLARIUM IV.

13. *Circuli in ſphæra, quorum idem eſt axis, eoſdem polos habent*. Etenim *axis* cujuſvis circuli in illius *polos* deſinit.

DEFINITIO VI.

14. *Ille circulus in ſphæra æqualiter diſtare dicitur ab utroque polo ipſius ſphæræ, cum omnes rectæ ductæ ab uno ipſius ſphæræ polo*

polo in illius peripheriam, æquales ſunt tum inter ſe, tum rectis omnibus, quæ ab altero polo in eandem peripheriam cadere poſſunt. Ut ſi *poli* ſphæræ ABCD fuerint duo puncta A, C, & æquales fuerint rectæ AB, AD tum inter ſe, tum rectis CB, CD, quæ ab ipſis *polis* in circuli BFD peripheriam cadunt, circulus BFD æqualiter diſtare dicetur a *polis* A, C ipſius ſphæræ. Fig. 11. Tab. 8.

COROLLARIUM I.

15. *Poli circuli in ſphæra ab utroque polo ipſius ſphæræ æqualiter diſtantis, diverſi non ſunt a polis ejuſdem ſphæræ.* Æquales namque ſunt omnes rectæ, quæ ab utroque ſphæræ *polo* in ipſius circuli peripheriam cadunt. Ergo iidem erunt utriuſque *poli* (a).

COROLLARIUM II.

16. *Axis circuli æqualiter diſtantis ab utroque polo ſphæræ eſt etiam axis ipſius ſphæræ.* Cum enim iidem ſint utriuſque *poli* (b), idem quoque erit utriuſque *axis* (c).

DEFINITIO VII.

17. *Duo circuli in ſphæra æqualiter diſtare dicuntur ab illius polis, cum omnes rectæ ductæ ab uno polo in unius peripheriam æquales ſunt tum inter ſe, tum omnibus rectis, quæ ab altero polo in alterius peripheriam cadunt.* Ut ſi duo circuli BF, CE ita ſe habuerint in ſphæra ABE, ut omnes rectæ AB, AF ductæ a *polo* A ſphæræ in peripheriam circuli BF æquales fuerint tum inter ſe, tum rectis omnibus, quæ a *polo* D ejuſdem ſphæræ in circuli CE peripheriam cadunt, duo circuli BF, CE æqualiter diſtantes erunt a *polis* A, D ipſius ſphæræ. Fig. 13. Tab. 7.

CO-

(a) §. 8.
(b) §. 15.
(c) §. 10.

COROLLARIUM I.

18. *Poli ſphæræ ſunt etiam poli omnium illorum circulorum, qui ab illis æqualiter diſtant*. Æquales enim ſunt rectæ, quæ ab ipſis *polis* in illorum circulorum peripheriam cadunt, prout requiritur, ut ſint eorundem *poli* (a).

COROLLARIUM II.

19. *Omnium circulorum, qui æqualiter diſtant a polis ſphærę, iidem ſunt poli*. Omnium enim *poli* ſunt *poli* ſphæræ (b).

COROLLARIUM III.

20. *Axis circulorum, qui ęqualiter diſtant a polis ſphęrę, ab axe ipſius ſphęrę minime diſtinguitur*. Neque enim poteſt eorum *axis* eſſe diverſus, ſi iidem ſunt *poli* (c).

COROLLARIUM IV.

21. *Idem eſt axis omnium illorum circulorum, qui æqualiter diſtant a polis ſphęrę*. Horum quippe omnium *axis* eſt *axis* ipſius ſphæræ (d).

DEFINITIO VIII.

22. *Ille circulus in ſphęra vocatur obliquus, in cujus peripheriam cadunt inęquales rectę lineę ab utroque polo ipſius ſphęrę*. Ut
Fig. 12. Tab. 8. ſi puncta A, D fuerint *poli* ſphæræ ABCD, circulus BEC erit in illa *obliquus*; quia inæquales ſunt rectæ AB, AC, quę a *polo* A in illius peripheriam cadunt.

CO-

(a) §. 8.
(b) §. 18.
(c) §. 12.
(d) §. 20.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

23. *Poli circuli in ſphęra obliqui diverſi ſunt a polis ſphęrę*. Ut enim iidem ſint *poli*, æquales debent eſſe rectæ, quæ ab utroque ſphæræ *polo* in ipſius circuli peripheriam cadunt (a).

COROLLARIUM II.

24. *Axis circuli in ſphęra obliqui diverſus eſt ab axe ſphęrę*. Quippe ut idem ſit *axis*, iidem debent eſſe *poli* (b).

DEFINITIO IX.

25. *Diſtantia circuli in ſphęra a ſuis polis, eſt arcus circuli per ipſius circuli polos tranſeuntis, inter illius peripheriam, ejuſque polos comprehenſus*. Ut ſi puncta A, C fuerint *poli* circuli BEDF in ſphæra ABCD, diſtantia ipſius circuli a ſuo *polo* A erit arcus AB circuli ABCD tranſeuntis per utrumque *polum* A, C, comprehenſus inter *polum* A, & ipſius circuli peripheriam. Diſtantia vero ejuſdem ab altero *polo* C, erit arcus BC ejuſdem circuli. Fig. 14. Tab. 8.

COROLLARIUM.

26. *Tot ergo graduum, & minutorum erit diſtantia cujuſvis circuli in ſphęra a ſuis polis, quot gradus, & minuta ſunt in arcu, qui illius diſtantiam metitur*. Nimirum tot *graduum*, & *minutorum* erit diſtantia circuli BEDF a ſuo *polo* A, quot ſunt *gradus*, & *minuta* in arcu AB circuli ABCD, penes quem hujuſmodi diſtantia ſpectatur.

DEFINITIO X.

27. *Duo circuli in ſphęra ęqualiter ab illius centro diſtare di-*

(a) §. 8. (b) §. 10.

cuntur, cum rectę perpendiculares ductę a centro ſphęrę in plana ipſorum circulorum ſunt inter ſe ęquales. Dicuntur vero inæqualiter diſtare ab ipſo centro, cum rectę hujuſmodi ſunt inæquales, ita Fig. 13. Tab. 8. *nimirum, ut ille magis diſtet, in cujus planum ab ipſo centro major perpendicularis cadit.* Ut ſi perpendiculares *xa*, *xd* ductæ a centro *x* ſphęræ ACE in plana circulorum BF, CE, fuerint æquales, circuli BF, CE æqualiter diſtabunt a centro *x* ipſius ſphæræ. Si vero recta *xa* major fuerit, quam recta *xd*, diſtantia circuli BF a centro *x* diſtantiam circuli CE ab eodem centro ſuperabit.

DEFINITIO XI.

28. *Unus circulus in ſphæra alterum orthogonaliter ſecare dicitur, cum unius planum alterius circuli planum ita dirimit, ut non magis in unam, quam in alteram partem inclinet. Dicitur vero ſecare oblique, cum eadem ubique non eſt unius in alterum in-* Fig. 14. *clinatio.* Orthogonaliter itaque circulus AECF ſecat circulum Fig. 12. Tab. 8. BEDF in ſphæra ABCD, quia planum circuli AECF ita dirimit planum circuli BEDF, ut ſegmentum circulare EAF ad perpendiculum plano circuli BEDF inſiſtat. Contra vero circulus DEAF oblique ſecat circulum BECF; quia ita illum diſpeſcit, ut ſegmentum circulare EAF oblique plano circuli BECF incumbat.

DEFINITIO XII.

29. *Circuli in ſphæra paralleli vocantur illi, quorum plana ſunt inter ſe parallela.* Ut ſi planum circuli BF parallelum fuerit Fig. 13. Tab. 8. plano circuli CE, duo circuli BF, CE in ſphæra ABE erunt paralleli.

COROLLARIUM.

30. *Peripherię circulorum in ſphæra parallelorum ſunt inter ſe parallelæ.* Niſi enim peripheriæ circulorum parallelorum in ſphæra ſint inter ſe parallelæ, eorum plana nequeunt eſſe ſibi mutuo parallela. De-

Digitized by Google

DEFINITIO XIII.

31. *Anguli ſphærales ſunt illi, qui in ſphærę ſuperficie a peri-pheriis duorum circulorum ipſius ſphærę ſe mutuo ſecantium in ea roducuntur*. Ut ſi peripheria circuli BED ſecet in puncto E ipheriam circuli AEC in ſphæra ABC, anguli BEA, AED, D, BEC in illius ſuperficie producti, *ſphęrales* vocantur. n autem arcus omnium circulorum tam maximorum, quam non maximorum ſphæræ *angulos ſphęricos* in illius ſuperficie conſtituere poſſint, verumtamen ii tantummodo anguli in ſphæra ſpectantur, qui a peripheriis circulorum maximorum in ejus ſuperficie producuntur. Hi ergo dividi ſolent in *rectos*, *acutos*, & *obtuſos*, ut de angulis planis rectilineis alibi diximus. Fig. 14. Tab. 8.

DEFINITIO XIV.

32. *Angulus ſphæralis rectus eſt ille, qui fit in ſuperficie ſphęræ a peripheriis duorum circulorum maximorum ſeſe mutuo orthogonaliter ſecantium*. Ut ſi in ſphæra ABCD duo circuli maximi BEDF, AECF ſeſe orthogonaliter ſecent, anguli AEB, AED, CEB, CED ab eorum peripheriis in illius ſuperficie producti, erunt anguli ſphærales recti. Fig. 14. Tab. 8.

DEFINITIO XV.

33. *Angulus ſphęralis acutus eſt ille, qui minor eſt recto. Angulus vero ſphęralis obtuſus eſt ille, qui rectum ſuperat.* Sphæralis acutus eſt angulus AEB; obtuſus vero angulus AEC. Quemadmodum ergo duo circuli in ſphæra maximi, cum orthogonaliter ſeſe mutuo ſecant, quatuor rectos angulos in puncto ſectionis efficiunt, ita ſi oblique ſeſe diſpeſcant, binos angulos ſphærales acutos, totidemque obtuſos in communi ſectionis puncto conſtituunt. Fig 12. Tab. 8.

DEFINITIO XVI.

34. *Menſura anguli ſphęralis a duobus circulis in ſphęra maximis ſeſe mutuo interſecantibus producti, eſt arcus circuli circa ſectionis punctum in ipſa ſphęra deſcripti, inter arcus angu-* Fig. 14. Tab. 8. *lum ipſum conſtituentes comprehenſus*. Sic menſura anguli ſphæralis BEA eſt arcus BA circuli ABCD deſcripti in ipſa ſphæra circa punctum E, comprehenſus inter arcus BE, AE, qui angulum ipſum BEA conſtituunt.

COROLLARIUM.

35. *Angulus ſphęralis productus a duobus circulis in ſphęra maximis erit tot graduum, & minutorum, quot gradus, & minuta complectitur arcus circuli circa ſectionis punctum in ſphęra deſcripti, inter arcus angulum ipſum conſtituentes compre-* Fig. 14. Tab. 8. *henſus*. Tot nimirum *graduum*, & *minutorum* erit angulus ſphæralis BEA, quot *gradus*, & *minuta* complectitur arcus BA, qui ipſius anguli quantitatem determinat.

DEFINITIO XVII.

36. *Diſtantia a ſe mutuo duorum circulorum ſphæræ eoſdem polos habentium eſt arcus circuli per ipſorum polos tranſeuntis,* Fig. 13. Tab. 5. *inter peripherias ipſorum circulorum comprehenſus*. Ut ſi duo circuli BF, CE eoſdem polos habeant A, D, per quos tranſeat circulus ABDF, menſura diſtantiæ circuli BF a circulo CE erit arcus BC ipſius circuli ABDF, qui inter peripherias ipſorum circulorum BF, CE continetur.

COROLLARIUM.

37. *Tot graduum, & minutorum eſt diſtantia duorum circulorum a ſe mutuo, quorum iidem ſint poli, quot gradus, & minuta ſunt in arcu, qui ipſorum diſtantiam metitur*. Sic tot *gra-*

graduum, & *minutorum* eſt diſtantia a ſe mutuo duorum circulorum BF, CE, quot ſunt *gradus*, & *minuta* in arcu BC.

THEOREMA I.

Si ſphæra ſecetur plano quomodcunque, communis ſectio ſphæræ, & plani erit circulus.

I.

38 Sphæra ABCD ſecetur plano, quod per illius centrum G tranſeat, ſitque communis ſectio BEDF. Dico, hanc eſſe circulum. Theod. I.I.p.1.

Demonſtratio.

A centro G ſphæræ ad curvam BEDF in plano ſectionis BEDF ducantur rectæ GE, GH, GD, GF, & aliæ quotcumque. Cum igitur punctum G ſit centrum ſphęrę ABCD, rectæque GE, GH, GD, GF ipſius radii (a), erunt omnes inter ſe æquales (b). Ergo ſectio BEDF eſt circulus (c). Fig. 14. Tab. I.

II.

39. Secetur modo ſphæra ABE plano CE extra illius centrum *x* traducto. Dico, ſectionem quoque C*b*E eſſe circulum. Fig. 11. Tab. I.

Demonſtratio.

A centro *x* ipſius ſpheræ ad planum ſectionis CE ducatur recta perpendicularis *xd*. A puncto vero *d* ad extremum plani CE rectæ ducantur *d*C, *db*, *d*E, & jungantur puncta *x*, C * *x*, *b* *, *x*, E, rectis *x*C, *xb*, *x*E. Quoniam igitur recta *xd* perpendicularis eſt plano CE, perpendicularis iti-

(a) Lib XI. §. 55.
(b) Ibibem §. 56.
(c) Lib. VII. §. 1.

Digitized by Google

itidem erit rectis dC, db, dE (a), atque ideo recti erunt anguli xdC, xdb, xdE (b), & triangula xdC, xdb, xdE erunt rectangula (c). Quamobrem quadrata laterum xd, dC æqualia erunt quadrato hypotenuſæ xC, ſicuti etiam quadrata laterum xd, db quadrato hypotenuſæ xb (d). Sunt autem quadrata rectarum xC, xb æqualia (e); cum lineæ ipſæ xC, xb, utpote ſphæræ radii, ſint inter ſe æquales (f). Ergo quadrata itidem laterum xd, dC ſimul ſumta æqualia erunt quadratis laterum xd, db (g). Ablato propterea communi quadrato lateris xd, erit quadratum lateris dC quadrato lateris bd æquale (h). Quadrata autem æqualia habent latera æqualia (i). Ergo recta dC rectam db æquabit. Eodem modo oſtendam, duas quoque db, dE eſſe æquales. Igitur æquales ſunt inter ſe tres rectæ dC, db, dE (k), eandemque ob cauſam omnes rectæ, quæ a puncto d in curvam CE duci poſſunt; ac proinde ſectio CbE erit circulus (l). Si ergo ſphæra &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Centrum circuli in ſphæra, qui per ipſius ſphæræ centrum tranſit, diverſum non eſt a centro ipſius ſphæræ.

Theod. I. I. Cor. P. I. Fig. 14. Tab. 8. 40. Oſtenſum eſt enim, punctum G, quod eſt centrum ſphæræ ABCD, centrum quoque eſſe circuli BEDF, qui per ipſius ſphęrę centrum tranſit.

COROLLARIUM II.

Diameter circuli per ſphæræ centrum tranſeuntis eſt etiam diameter ipſius ſphæræ.

41. Cum enim diameter tam ſphęrę, quam circuli ſit recta

(a) Lib. VIII. §. 2.
(b) Lib. III. §. 23.
(c) Lib. V. §. 29.
(d) Lib. VI. §. 37.
(e) Lib. I. §. 187.
(f) Lib. XI. §. 56.
(g) Syn. Alg. §. 265.
(h) Ibidem §. 266.
(i) Lib. I. §. 187.
(k) Syn. Alg. §. 259.
(l) Lib. VII. §. 1.

cta tranſiens per utriuſque centrum; & peripheria circuli in ſphęra poſiti tota in ipſius ſphęrę ſuperficie conſiſtat (a), idem nequit eſſe centrum ſphęrę, & circuli in illa deſcripti, niſi eadem quoque ſit utriuſque diameter.

COROLLARIUM III.

Recta ducta a centro ſphæræ in planum circuli extra illius centrum tranſeuntis, eique ad perpendiculum incumbens, tranſit per centrum ipſius circuli.

42. Si nimirum recta X*d* ducta a centro *x* ſphęræ ABDE in planum circuli C*b*E fuerit ipſi plano perpendicularis, punctum *d* erit centrum ipſius circuli. Demonſtravimus enim, rectas omnes *d*C, *db*, *d*E, quę a puncto *d* in peripheriam C*b*E cadunt, eſſe inter ſe ęquales. Theod. lib. 1. Cor. 2. p. 1. Fig. 13. Tab. 8.

THEOREMA II.

Recta linea ducta a centro ſphæræ in centrum circuli extra ipſius ſphæræ centrum tranſeuntis, eſt plano ipſius circuli perpendicularis.

43. Extra centrum A ſphęrę DBC habeatur circulus BC, in cujus centrum *a* cadat a centro A ipſius ſphęrę recta A*a*. Dico, rectam hujuſmodi plano circuli BC ad perpendiculum incumbere. Theod. l. 1. p. 7.

Demonſtratio.

Enim vero ſi recta A*a* perpendicularis non eſt circulo BC, ducatur a centro A ſphęrę in planum ipſius circuli recta perpendicularis A*b*. Erit ergo punctum *b* centrum circuli BC (b). Eſt autem per hypotheſim etiam punctum *a* centrum ejus- Fig 15. Tab. 8.

(a) §. 5. (b) §. 42.

Digitized by Google

ejusdem circuli BC. Ergo circuli BC duo ſunt centra *a*, *b*. Id autem repugnat (a). Ergo punctum *b* non eſt centrum circuli BC; adeoque recta *Ab* circulo BC ad perpendiculum non incumbit, eandemque ob cauſam nulla alia preter rectam *Aa*. Igitur recta linea &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Illi circuli in ſphæra æqualiter diſtant ab illius centro, in quorum centrum æquales rectæ cadunt a centro ipſius ſphæræ. Inæqualiter vero illi, in quorum centrum a centro ſphæræ cadunt rectæ inæquales.

44. Eadem ſcilicet erit diſtantia circulorum BF, CE a centro *x* ſphęrę ABCF, ſi rectę, *xa*, *xd* ductæ ab ipſius ſphęrę centro *x* in centra *a*, *d* ipſorum circulorum fuerint Fig. 13. Tab. 8. ęquales. Inęqualis vero erit diſtantia, ſi rectę *xa*, *xd* fuerint inæquales. Illi ſiquidem circuli ęqualiter diſtare dicuntur a centro ſphærę, in quorum planum cadunt ęquales rectæ perpendiculares a centro ipſius ſphęræ. Illi vero dicuntur diſtare inæqualiter, in quorum planum inæquales perpendiculares cadunt ab eodem centro (b). Ergo cum rectæ *xa*, *xd* perpendiculariter incumbant planis circulorum BF, CE, patet propoſitum.

THEOREMA III.

Circulus in ſphæra, qui per illius centrum tranſit, eſt omnium maximus. Et viciſſim circuli in ſphæra maximi per illius centrum tranſeunt.

I.

45. In ſphæra ABCD duo habeantur circuli BD, GH, quo-

(a) Lib. VII. §. 36. (b) §. 27.

quorum BD tranſeat per centrum *a* ipſius ſphæræ. Dico, circulum BD majorem eſſe circulo GH. Theod. l. 1. p. 6.

Demonſtratio.

Cum enim circulus BD tranſeat per centrum *a* ſphæræ ABCD, minime vero circulus GH, diameter circuli BD, non autem circuli GH, erit diameter ipſius ſphæræ (a). Eſt autem diameter ſphæræ omnium rectarum, quæ in ipſa ſphæra eſſe poſſunt, maxima (b). Ergo diameter circuli BD major erit diametro circuli GH. Ille autem circulus major eſt, qui majorem diametrum habet (c). Ergo circulus BD major erit circulo GH, & eadem ratione omnibus aliis, qui extra centrum *a* in ipſa ſphæra ABCD haberi poſſunt, adeoque &c. Fig. 11. Tab. 1.

II.

46. Viciſſim vero circulus BD ſit maximus in ſphæra ABCD. Dico, ipſum tranſire per centrum ipſius ſphæræ. Theod. l. 1. p. 6.

Demonſtratio.

Enimvero, quoniam circulus BD maximus eſt in ſphæra ABCD, illius quoque diameter BD erit maxima rectarum omnium, quæ in ipſa ſphæra duci poſſunt. Atqui maxima rectarum in ſphæra per illius centrum tranſit (d). Ergo circulus quoque maximus BD per ſphæræ ABCD centrum tranſeat neceſſe eſt. Itaque circulus &c. quod erat oſtendendum.

(a) §. 41.
(b) Lib. XI. §. 120.
(c) Lib. IX. §. 50.
(d) Lib. XI. §. 119.

COROLLARIUM I.

Centrum circuli in ſphæra maximi diverſum non eſt a centro ipſius ſphæræ.

47. Cum enim hujuſmodi circulus tranſeat per centrum ſphæræ, idem erit utriuſque centrum (a).

COROLLARIUM II.

Idem eſt centrum omnium circulorum maximorum ſphæræ.

48. Etenim cum horum centrum diverſum non ſit a centro ſphæræ (b), & unius ſphæræ unicum ſit centrum (c), unum erit centrum omnium circulorum maximorum ſphæræ.

COROLLARIUM III.

Diameter circuli in ſphæra maximi eſt etiam diameter ipſius ſphæræ.

49. Neque enim poteſt eſſe idem centrum utriuſque, quin eadem quoque ſit utriuſque diameter; cum circuli peripheria in ipſius ſphæræ ſuperficie tota conſiſtat (d).

COROLLARIUM IV.

Diametri omnium circulorum maximorum ſphæræ ſunt inter ſe æquales.

50. Quandoquidem diametri omnium circulorum maximorum ſphæræ ſunt etiam diametri ipſius ſphæræ (e), quæ omnes ſunt inter ſe æquales (f).

CO-

(a) §. 40.
(b) §. 47.
(c) Lib. XI. §. 116.
(d) §. 5.
(e) §. 49.
(f) Lib. XI. §. 57.

COROLLARIUM V.

Omnes circuli in ſphæra maximi ſunt inter ſe æquales.

51. Æquales namque ſunt inter ſe omnes illi circuli, quorum diametri ſunt æquales (a). Hujuſmodi autem ſunt omnes diametri circulorum maximorum ſphæræ (b). Ergo &c. Theod. l. 1. p. 6. Coroll.

COROLLARIUM VI.

Quilibet circulus in ſphæra maximus ſphæram ipſam biſariam dividit.

52. Cum enim quilibet circulus in ſphæra maximus per ipſius ſphæræ centrum tranſeat, quilibet eorum ſphæram ipſam biſariam dividat neceſſe eſt. Dividitur enim ſphæra biſariam plano per ipſius ſphæræ centrum tranſeunte (c).

THEOREMA IV.

Omnes circuli in ſphæra maximi ſe ſe mutuo biſariam dividunt.

53. In ſphæra ABDC duo habeantur circuli maximi AEDF, BECF. Dico, eos ſeſe mutuo biſariam dividere. Theod. l. 1. p. 11

Demonſtratio.

Quandoquidem cum idem ſit utriuſque circuli centrum (d), neceſſe eſt, ut ſeſe mutuo dividant. Quoniam vero communis ſectio duorum planorum eſt recta linea (e), recta Fig. 12. Tab. 1. EF erit ſectio duorum circulorum AEDF, BECF, utpote terminata punctis E, F, in quibus ipſorum circulorum peripher-

H 2

(a) Lib. IX. §. 50.
(b) §. 57.
(c) Lib. XI. §. 53.
(d) §. 48.
(e) Lib. VIII. §. 24.

ripheriæ ſeſe mutuo dirimunt. Igitur cum idem ſit centrum omnium circulorum maximorum ſphæræ, adeoque etiam circulorum AEDF, BECF (a), centrum horum circulorum erit in communi ſectione, ſive recta EF. Hæc autem in utriuſque circuli peripheriam deſinit, utpote punctis E, F terminata. Ergo recta EF erit utriuſque circuli diameter (b). Omnis porro diameter circuli dividit circulum ipſum bifariam (c). Ergo circuli AEDF, BECF bifariam a recta EF diviſi erunt; ac proinde, cum recta EF ſit communis utriuſque ſectio, circuli AEDF, BECF ſeſe mutuo dividunt bifariam. Omnes itaque circuli in ſphæra maximi &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Recta conjungens puncta, in quibus peripheriæ duorum circulorum maximorum ſphæræ in illius ſuperficie ſeſe mutuo dirimunt, per ipſius ſphæræ centrum tranſit.

Fig. 12. Tab. 8. 54. Recta nimirum EF, qua ſimul junguntur puncta E, F, in quibus ſeſe mutuo dirimunt peripheriæ duorum circulorum maximorum AEDF, BECF in ſphæra ABDC, tranſibit per centrum ipſius ſphæræ. Oſtenſum eſt enim, centrum circulorum AEDF, BECF eſſe in recta EF, quæ eſt communis utriuſque ſectio. Centrum autem ſphæræ diverſum non eſt a centro ipſorum circulorum AEDF, BECF (d), utpote qui in illa ſunt maximi. Ergo recta EF conjungens puncta mutuæ ſectionis E, F per ipſius ſphæræ centrum tranſit.

THEO-

(a) §. 48
(b) Lib. VII. §. 7
(c) Ibidem §. 8.
(d) §. 47.

THEOREMA V.

Circuli in ſphæra, qui ſeſe mutuo in ea bifariam ſecant, ſunt maximi.

55. In ſphæra ABDC duo habeantur circuli BECF, AE*D*F, qui in illa ſeſe mutuo bifariam dividant. Dico, eos eſſe in ipſa ſphæra maximos. Theod. l.1.p.12

Demonſtratio.

Cum enim ex hypotheſi duo circuli BECF, AE*D*F ſeſe mutuo bifariam dividant, communis ipſorum ſectio, recta nimirum EF, per utriuſque centrum tranſibit, ſeu communis erit utriuſque diameter. Hæc enim tantum hujuſmodi eſt, ut circulum in duo æqualia ſegmenta diſpeſcat (a). Fig. 12. Tab. 1. Igitur punctum *a*, quod in medio rectæ EF conſiſtit, erit centrum utriuſque circuli BECF, AE*D*F (b); omneſque proinde rectæ *a*A, *a*B, *a*E, *a*D, *a*C, *a*F, & aliæ quotcunque ductæ a communi centro *a* in peripherias circulorum BECF, AE*D*F, erunt inter ſe æquales (c). Illæ autem peripheriæ ſunt in ſuperficie ſphæræ ABDC (d). Ergo rectæ omnes ductæ a puncto *a* in illa omnia ſphæricę ſuperficiei puncta, per quę tranſeunt illę peripherię, ſunt inter ſe æquales. Eodem modo oſtendam, ductis nimirum aliis circulis, qui cum altero ipſorum BECF, AE*D*F ſeſe mutuo bifariam dividant, rectas omnes ductas ab eodem puncto *a* in illorum peripherias ęquales eſſe rectis, quæ ab eodem puncto *a* cadunt in peripheriam circuli BECF. Ergo omnes rectę ductę a puncto *a* ad ſuperficiem ſphęrę ABDC ęquales ſunt inter ſe. Igitur punctum *a* erit ipſius ſphęrę centrum (e). Per illud autem tranſeunt circuli BECF, AE*D*F. Ergo ſunt in ipſa ſphęra maximi (f). Itaque circuli in ſphęra &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

(a) Lib. VII. §. 8.
(b) Ibidem §. 3.
(c) Ibidem §. 10.
(d) §. 5.
(e) Lib. XI. §. 51.
(f) §. 45.

Digitized by Google

THEOREMA VI.

Anguli ſphærales ad verticem oppoſiti, qui fiunt a duobus circulis in ſphæra maximis, ſunt inter ſe æquales.

Fig. 12. Tab. I. 56. Duo circuli maximi AEDF, BECF in ſphæra ABDC ſeſe mutuo ſecent, anguloſque efficiant BEA, BED, DEC, CEA, quorum duo BEA, DEC ſint ad verticem oppoſiti, quemadmodum etiam duo BED, AEC. Dico, duos BEA, DEC, ſicuti etiam duos BED, AEC eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Duo circuli BECF, AEDF ſecentur circulo maximo ABDC illis ad perpendiculum inſiſtente, ſintque rectæ AD, BC communes eorum ſectiones. Cum igitur horum omnium circulorum idem ſit centrum *a* (a), rectæque AD, BC in eodem plano ABDC conſiſtant, æquales erunt anguli B*a*A, D*a*C ad verticem oppoſiti, quemadmodum etiam anguli A*a*C, B*a*D (b). Igitur arcus quoque BA, DC, nec non arcus AC, BD erunt æquales (c). Eſt autem arcus BA menſura anguli BEA, & arcus DC menſura anguli DEC (d). Ergo duo anguli BEA, DEC erunt inter ſe æquales. Eadem ratione æquales erunt etiam duo AEC, BED; cum jam oſtenſum ſit, arcus quoque AC, BD eſſe æquales. Itaque anguli ſphærales &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

57. Quod diximus de angulis BEA, DEC, intelligendum eſt etiam de angulis BFA, DFC. Eadem eſt enim horum omnium menſura, arcus nimirum BA, DC. Idipſum quoque dicto de angulis BFD, AFC.

THEO-

(a) §. 48
(b) Lib. III. §. 51.
(c) Lib. VII. §. 27.
(d) §. 54.

THEOREMA VII.

Recta tranſiens per centrum circuli in ſphæra, eique ad perpendiculum incumbens, ſi utrinque producatur, in illius polos deſinit.

58. Recta AC tranſeat per centrum G circuli BEDF in ſphæra ABCD, eique ad perpendiculum incumbat. Producatur autem utrinque, ita ut in ſphæræ ſuperficiem deſinat, ſintque A, C extrema illius puncta. Dico, puncta A, C eſſe polos ipſius circuli BEDF. Theod. l. 1. p. 1.

Demonſtratio

In peripheria circuli BEDF ſumantur puncta B, E, D, F, ad quæ ducantur a centro G ipſius circuli rectæ GB, GE, GD, GF, & a puncto A rectæ AB, AE, AD, AF. Cum igitur recta AG ſit ex hypotheſi perpendicularis plano BEDF, perpendicularis quoque erit rectis GB, GE, GD, GF (a), eruntque proinde triangula AGB, AGE, AGD, AGF rectangula. Quadratum ergo rectæ AB æquale erit quadratis rectarum AG, GB; quadratum rectæ AE quadratis rectarum AG, GE; quadratum rectæ AD quadratis rectarum AG, GD; & quadratum rectæ AF quadratis rectarum AG, GF ſimul ſumtis (b). Quoniam autem rectæ GF, GB, GD, GE ſunt æquales (c), earum quadrata erunt æqualia (d). Illis propterea ſingulis addito quadrato rectæ AG, quadrata rectarum AG, GB æqualia erunt quadratis rectarum AG, GE; harum quadrata quadratis rectarum AG, GD, & hæc quadratis rectarum AG, GF. Æqualia autem ſunt inter ſe, quæ eidem, vel æqualibus ſunt æqualia (e). Ergo æqualia inter ſe erunt quadrata rectarum AB, AE, AD, AF; ac proinde ipſæ quoque AB, AE, AD, AF erunt inter ſe æ- Fig. 14. Tab. 8.

qua-

(a) Lib. VIII. §. 6.
(b) Lib. VI. §. 37.
(c) Lib. VII. §. 10.
(d) Lib. I. §. 187.
(e) Synop. Aleg. §. 159.

quales (a). Eodem modo oſtendam, rectas omnes, quæ a puncto A in peripheriam BEDF cadere poſſunt, æquales eſſe inter ſe, quemadmodum etiam eas omnes, quæ a puncto C in eandem peripheriam cadere queunt. Igitur duo puncta A, C ſunt poli circuli BEDF (b). Igitur recta tranſiens &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Recta tranſiens per centrum circuli in ſphæra, eique ad perpendiculum incumbens, eſt axis ipſius circuli.

59. Recta nimirum AC tranſiens per centrum circuli BEDF in ſphæra ABCD, eique ad perpendiculum incumbens, eſt axis ipſius circuli. Oſtenſum eſt enim, rectam hujuſmodi tranſire per ipſius circuli polos A, C, in quo axis ratio conſiſtit (c).
Fig. 14. Tab. 1.

COROLLARIUM II.

Recta in ſphæra tranſiens per centrum ipſius ſphæræ, & per centrum circuli in ea poſiti, eſt axis ipſius circuli.

60. Ut ſi centrum ſphæræ ACE ſit punctum x, & centrum circuli CbE in ea poſiti ſit d, recta AD tranſiens per utrumque centrum x, d, erit axis ipſius circuli CbE. Oſtenſum eſt enim, rectam hujuſmodi AD ad perpendiculum circulo CbE incumbere (d).
Fig. 13. Tab. 1.

CO-

(a) Lib. I. §. 187.
(b) §. 6.
(c) §. 9.
(d) §. 43.

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

Recta conjungens centra ſphæræ, & circuli in ea poſiti, ſi utrinque producatur, tranſit per polos ipſius circuli.

61. Nimirum recta *xd* conjungens centrum *x* ſphæræ ACE cum centro *d* circuli C*b*E in ea poſiti, ſi utrinque in directum producta fuerit, tranſibit per ipſius circuli polos A, *D*. Cum enim hujuſmodi recta A*D* ſit axis circuli C*b*E (a), per illius polos tranſeat neceſſe eſt (b). Fig. 13. Tab. I.

THEOREMA VIII.

Recta ducta ab uno in alterum polum circuli in ſphæra, tranſit per centrum ſphæræ, & ipſius circuli, eique ad perpendiculum incumbit.

In ſphæra ABCD habeatur circulus BFDE, cujus poli ſint duo puncta A, C. Ducatur autem a polo A ad polum C recta AC. Theod. L.I.P.10

I.

62. Dico primo, rectam AC tranſire per centrum ipſius circuli, ſeu punctum *a*, per quod tranſit recta AC, eſſe centrum circuli BFDE. Fig. 11. Tab. I.

Demonſtratio.

In peripheria circuli BFDE ſumantur duo puncta B, D, eaque jungantur polis A, C ipſius circuli ope rectarum AB, AD, CB, CD. Inſuper a puncto *a* ad ipſa B, D rectæ ducantur *a*B, *a*D. Quoniam igitur puncta A, C ſunt poli circuli BFDE, æquales erunt inter ſe tum rectæ

(a) §. 60.
(b) §. 9.

BA, DA, tum rectæ BC, CD(a). Eſt autem recta AC communis utrique triangulo BAC, DAC. Ergo anguli BAC, DAC erunt inter ſe æquales (b). Quamobrem ſi duo ſpectentur triangula *a*AB, *a*AD, cum duo latera BA, AD ſint æqualia, latus A*a* ſit commune, & anguli BA*a*, DA*a* æquales itidem ſint inter ſe, baſis quoque *Ba* erit baſi D*a* æqualis (c), . Eodem modo oſtendam, rectam quamcumque ductam a puncto *a* in peripheriam circuli BFDE eſſe æqualem uni earum B*a*. Æquales ſunt autem inter ſe, quæ eidem rectæ ſunt æquales (d). Ergo omnes rectæ, quæ a puncto *a* in peripheriam cadunt BFDE, ſunt inter ſe æquales, ac proinde punctum *a* eſt centrum ipſius circuli BFDE (e). Igitur recta AC per ipſius circuli centrum tranſit.

I I.

63. Dico ſecundo, rectam AC ductam a polo A ad polum C circuli BFDE, ipſi circulo ad perpendiculum incumbere.

Demonſtratio.

Per punctum *a*, quod, ut modo demonſtravimus, eſt centrum circuli BFDE, ducatur recta, ſive diameter BD, ad cujus extrema B, D ducantur a polo A ipſius circuli rectæ AB, AD. Cum igitur radii *a*B, *a*D æquales ſint inter ſe (f), quemadmodum etiam rectę *AB*, *AD* (g), & recta A*a* ſit communis utrique triangulo A*aB*, A*aD*, erit angulus A*aB* angulo A*aD* æqualis (h). *D*uo autem hujuſmodi anguli valent duos rectos (i). *E*rgo uterque A*aB*, A*aD* erit rectus; ac proinde recta A*a* erit ipſi *BD* perpendicularis (*k*), ſicuti etiam recta C*a* (l). *E*odem modo demonſtrabitur, rectam

(a) §. 6.
(b) Lib. V. §. 82.
(c) Ibidem §. 73.
(d) Syn. Alg §. 259.
(e) Lib. VII. §. 3.
(f) Ibid. §. 10.
(g) §. 6.
(h) Lib. V. §. 81.
(i) Lib. III §. 40.
(K) Lib. III § 24.
(l) Ibid. §. 53.

ctam AC perpendicularem eſſe alteri diametro, omnibuſque aliis rectis, quæ in eodem plano BFDE per centrum *a* duci poſſunt. Igitur recta AC ad perpendiculum circulo BFDE incumbit (a); adeoque &c.

III.

64. Dico tertio, rectam AC tranſire etiam per centrum ipſius ſphæræ ABCD.

Demonſtratio.

Si namque circulus BFDE ponatur in ſphæra maximus; cum illius centrum *a* diverſum tunc non ſit a centro ipſius ſphæræ (b), patet propoſitum. Oſtenſum eſt enim, rectam AC tranſire per centrum ipſius circuli BFDE. Si vero circulus non ſit maximus in ſphæra, cujuſmodi non eſt circulus BC in ſphæra DBC, ac proinde per illius centrum A non tranſeat, adhuc dico, rectam DE ductam a polo D ad polum *E* ipſius circuli BC tranſire per centrum ſphæræ BDC. Sit namque, ſi fieri poteſt, centrum ſphæræ DBC extra rectam DE, ſitque illud punctum *d*. Igitur recta *da* ducta a centro *d* ſphæræ in centrum *a* circuli BC, per quod, ut modo vidimus, tranſit recta illius polos conjungens DE, erit plano circulari BC perpendicularis (c). Oſtenſum eſt autem, etiam rectam D*a* eſſe circulo BC perpendicularem. Ergo duæ rectæ *da*, D*a* plano BC ad punctum *a* perpendiculariter incumbunt. Id autem repugnat (d). Ergo punctum *d* non eſt centrum ſphæræ *D*BC. *E*odem modo oſtendam, nullum aliud punctum extra rectam *DE* eſſe centrum ipſius ſphæræ DBC. Igitur centrum hujuſmodi in ipſa recta D*E* reperitur; ac proinde recta conjungens polos circuli in ſphæra per ipſius ſphæræ centrum tranſit. Itaque recta &c. quod erat oſtendum.

Fig. 11. Tab. 1.

Fig. 15. Tab. 1.

I 2 co-

(a) Lib. VIII. §. 2.
(b) §. 47.
(c) §. 41.
(d) Lib. VIII. §. 14.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Axis cujuſvis circuli in ſphæra tranſit per centrum tum ſphæræ, tum ipſius circuli, eique ad perpendiculum incumbit.

65. Axis enim circuli cujuſcumque in ſphæra eſt recta ducta ab uno in alterum polum ipſius circuli (a).

COROLLARIUM II.

Axis cujuſvis circuli in ſphæra eſt diameter ipſius ſphæræ.

66. Diameter namque ſphæræ eſt recta per illius centrum tranſiens (b), cujuſmodi eſt axis cujuſvis circuli in ſphæra, ut modo demonſtravimus.

COROLLARIUM III.

Circulus in ſphæra tranſiens per polos alterius in ea circuli, per ejusdem quoque centrum tranſit.

67. Nimirum circulus A*B*DF in ſphæra A*B*E tranſiens per polos A, D circuli *BF*, per ejusdem quoque circuli centrum tranſibit. Etenim ſi tranſit per polos A, D, axis ipſius circuli *BF*, nempe recta A*D*, erit in plano circuli
Fig. 13. Tab. 1. tranſeuntis A*B*DF. Hic autem tranſit per centrum circuli *BF* (c). Ergo per idem centrum tranſibit quoque circulus A*BDF*.

COROLLARIUM IV.

Circulus in ſphæra, qui per alterius in ea circuli polos tranſit, biſariam illum dividit.

68. Si nempe circulus *ABDF* tranſeat per polos A, *D* circuli

(a) §. 9.
(b) Lib. XI. §. 54.
(c) §. 65.

culi *BF*, circulum ipſum bifariam dividit. Cum enim circulus ABDF tranſeat per centrum circuli BF (a), ita ſecabit circulum BF, ut communis ipſorum ſectio *BF* per illius centrum tranſeat. Hæc autem eſt recta linea (b), ipſumque circulum recta hujuſmodi bifariam dividit (c). Ergo circulus ABDF dividit bifariam circulum *BF*. Theod. l.1.p.15 Fig.1 Tab.1.

COROLLARIUM V.

Circulus in ſphæra, qui per alterius polos tranſit, eſt in illa maximus.

69. Videlicet circulus *ABCE* tranſiens per polos A, *D*, circuli *BF*, erit maximus in ſphæra ACF. Cum enim recta *AD* conjungens polos A, *D* ſit in plano circuli *ABCE*, is erit in ſphæra maximus (d). Fig. 13. Tab.1.

COROLLARIUM VI.

Arcus circuli, qui metitur in ſphæra diſtantiam tum circuli a ſuis polis, tum duorum circulorum eosdem polos habentium a ſe mutuo, eſt arcus circuli in ea maximi.

70. Hujuſmodi ſiquidem arcus eſt arcus circuli tranſeuntis per illorum circulorum polos (e); ac proinde &c.

THEOREMA IX.

Circulus in ſphæra, qui per alterius circuli polos tranſit, orthogonaliter illum ſecat.

71. Eſto in ſphæra *ABCD* circulus *BEDF*, per cujus polos A, C tranſeat circulus *AECF*. Dico, circulum *BEDF* ortho- Theod. l.1.p.15

(a) §. 67.
(b) Lib. VIII. §.24.
(c) Lib. VII. §. 8.
(d) §. 45.
(e) §. 25., & 36.

orthogonaliter dividi a circulo AECF.

Demonſtratio.

A polo A ad polum C circuli BEDF, adeoque in plano ſecantis circuli AECF, ducta intelligatur recta AC. Manifeſtum eſt, rectam AC plano circuli BED*F* ad perpendiculum incumbere (a); ſique propterea ducatur a puncto G, per quod tranſit recta AC, in plano circuli BE*DF* recta G*D*, angulus AG*D* erit rectus (b). Angulus autem AG*D* determinat inclinationem ſemicirculi EA*F* ad planum BE*DF* (c). Ergo ſemicirculus EA*F* ad perpendiculum plano circuli BE*DF* incumbit; totuſque proinde circulus AEC*F* circulum BE*DF* orthogonaliter ſecat (d). Circulus ergo in ſphęra &c. quod erat oſtendendum.

Fig. 14. Tab. 8.

THEOREMA X.

Si per polos circuli in ſphæra quamplures circuli ducantur, omnes illorum arcus inter polum, & peripheriam ipſius circuli intercepti, ſunt inter ſe æquales.

Fig. 14. Tab. 6. 72. Per polos A, C circuli BE*DF* in ſphęra ABC*D* ducantur duo circuli *ABCD*, AEC*F*. *D*ico, arcus A*B*, AE, *AD*, *AF* horum circulorum inter polum A, & peripheriam *BEDF* comprehenſos, quemadmodum etiam arcus *CB*, CE', *CD*, *CF*, qui continentur inter polum C, eandemque peripheriam *B*E*DF*, eſſe inter ſe ęquales.

Demonſtratio.

*D*ucantur a polo A ad puncta *B*, *D* in plano circuli A*B*C*D* rectę AB, A*D*, ad puncta autem E, *F* in plano circuli AEC*F* rectæ A*E*, A*F*. Quoniam igitur circuli ABC*D*, *AECF* ſunt

(a) §. 63.
(b) Lib. VIII. §. 2.
(c) Ibidem §. 10.
(d) §. 28.

Digitized by Google

ſunt in ſphæra maximi (a), adeoque æquales inter ſe (b), rectę AB, AD, AE, AF erunt chordę circulorum ęqualium. Sunt autem hujuſmodi rectę ęquales inter ſe (c). Ergo arcus quoque AB, AD, AE, AF ſunt inter ſe ęquales (d). Eodem modo oſtendam, arcus quoque CB, CD, CE, CF eſſe ęquales. Igitur, ſi per polos circuli &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XI.

Omnis circulus in ſphæra maximus diſtat a ſuis polis quadrante circuli maximi. Et viciſſim, qui diſtat a ſuis polis quadrante circuli maximi, maximus eſt.

I.

73. Circulus BEDF ſit maximus in ſphęra ABCD, ejuſque poli ſint duo puncta A, C. Dico, circulum BEDF diſtare a polis A, C quadrante circuli maximi. Theod. lib. 1. Coroll. p. 16.

Demonſtratio.

Ductis namque per polos A, C circulis ABCD, AECF, cum hi ſint maximi in ipſa ſphęra (e), & biſariam a circulo BEDF, utpote qui maximus eſt, dividantur (f), arcus BAD, EAF, quemadmodum etiam arcus BCD, ECF, erunt ſemiperipheriæ circulorum maximorum ABCD, AECF. Fig. 1.4 Tab. 8. Circuli autem ABCD, AECF ęquales ſunt inter ſe (g). Ergo eorum quoque arcus BAD, EAF, BCD, ECF erunt æquales (h). Sunt autem æquales etiam arcus AB, AE, AD, AF, ſicuti etiam arcus CB, CE, CD, CF (i). Ergo eorum quilibet erit medietas ſemicirculi, ſive quadrans circirculi maximi. Metiuntur autem diſtantiam circuli BEDF a ſuis polis A, C (k). Ergo circulus BEDF diſtat a ſuis polis

(a) §. 69.
(b) §. 51.
(c) §. 6
(d) Lib. VII. §. 38.
(e) §. 69.
(f) §. 53.
(g) §. 50.
(h) Lib. I. §. 126.
(i) §. 72.
(k) §. 70.

Digitized by Google

polis quadrante circuli maximi; adeoque &c.

II.

74. Viciſſim vero circulus *BEDF* in ſphæra *ABCD* diſtet a ſuis polis *A*, *C* quadrante circuli maximi, ductis nimirum per ejus polos circulis *ABCD*, *AECF*, arcus *AB*, *AE*, *AD*, *AF* ſint quadrantes circuli maximi, quemadmodum etiam arcus BC, *EC*, *DC*, *FC*. Dico, circulum *BEDF* eſſe circulum maximum.

Theod. lib. 1. Coroll. p. 17.

Demonſtratio.

Cum enim circulus *ABCD* ſit maximus in ſphæra (a), & arcus *AB*, *AD* ſint ipſius quadrantes per hypotheſim, recta *BD* erit diameter ipſius circuli *ABCD*. Circulus autem *ABCD* biſariam dividit circulum *BEDF* (b), eorumque communis ſectio eſt recta *BD* (c). Ergo recta *BD* eſt diameter etiam circuli *BEDF* (d), ac proinde circuli *ABCD*, *BEDF* ſunt æquales (e). Eſt autem circulus *ABCD* maximus in ſphæra *ABCD*. Ergo circulus quoque *BEDF* erit in eadem ſphæra maximus. Omnis itaque circulus &c. quod erat oſtendendum.

Fig. 14. Tab. 8.

THEOREMA XII.

Circulus in ſphæra maximus alterum in eadem ſphæra circulum orthogonaliter ſecans, biſariam illum ſecat, & per illius polos tranſit.

In ſphæra ABDF habeatur circulus maximus ABDF, qui circulum C*b*E in eadem ſphæra poſitum orthogonaliter dividat.

Teod. l. 1. p. 13

I.

75. Dico primo, circulum maximum ABDF biſariam dividere circulum C*b*E. *De-*

Fig. 13. Tab. 8.

(a) §. 69.
(b) §. 68.
(b) Lib. VIII. §. 24.
(d) Lib. VII. §. 7.
(a) Lib. IX. §. 50.

Demonſtratio.

Punctum *x* ſit centrum ſphæræ, adeoque etiam ipſius circuli ABDF (a). Recta autem CE ſit communis ſectio circulorum ABDF, C*b*E (b). Cum igitur totum planum ABDF ad perpendiculum ex hypotheſi inſiſtat plano C*b*E, poteſt in ipſo plano ABDF duci recta, quæ per centrum *x* ipſius ſphæræ tranſiens, plano C*b*E ad perpendiculum incumbat (c). Sit ergo AD hujuſmodi recta perpendicularis plano C*b*E. Igitur punctum *d* in circulo C*b*E, per quod illa tranſit, erit centrum ipſius circuli C*b*E (d). Eſt autem punctum *d* in communi ſectione, ſive recta CE. Ergo recta CE erit diameter circuli C*b*E (e). Cumque circuli diameter ipſum bifariam dividat (f), planum, ſive circulus ABEF bifariam dividit circulum C*b*E; adeoque &c.

I I.

76. Dico 2, circulum ABDF tranſire per polos circuli C*b*E.

Demonſtratio.

Oſtenſum eſt, rectam AD, quæ tota eſt in plano ſecantis circuli ABEF, per ſphæræ centrum tranſit, & circulo C*b*E Fig. 11.
ad perpendiculum incumbit, tranſire per centrum *d* ipſius Tab. I.
circuli C*b*E. Igitur erit axis ipſius circuli C*b*E (g); ejuſque proinde extrema puncta A, D erunt poli ejuſdem circuli C*b*E (h). Duo autem puncta A, D ſunt in peripheria circuli ABDF, quemadmodum tota AD in ejus plano reperitur. Ergo peripheria circuli ABDF tranſit per polos circuli C*b*E. Itaque circulus in ſphæra maximus &c. quod erat oſtendendum.

(a) §. 67.
(b) Lib. VIII. §. 24.
(c) Ibidem §. 2.
(d) §. 42.
(e) Lib. VII. §. 7.
(f) Ibidem §. 8.
(g) §. 60.
(h) §. 61.

THEOREMA XIII.

Si in ſphera circulus maximus tranſeat per polos alterius circuli in ea maximi, hic viciſſim tranſibit per polos illius.

Theod. lib. 1. Coroll. 1 p. 15. 77. In ſphæra ABCD circulus maximus AECF tranſeat per polos A, C alterius circuli in ea maximi BEDF. Dico, circulum quoque BEDF tranſire per polos ipſius AECF.

Demonſtratio.

Cum enim circulus AECF tranſeat per polos A, C circuli BEDF, ipſum circulum BEDF orthogonaliter ſecabit (a), Fig. 14. Tab. 8. ac proinde viciſſim circulus AECF orthogonaliter ſecabitur a circulo BEDF. Eſt autem circulus BEDF maximus in ipſa ſphæra ABCD per hypotheſim. Ergo circulus BEDF tranſibit per polos ipſius circuli AECF (b). Itaque ſi in ſphæra circulus maximus &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Si duo circuli in ſphæra maximi ſeſe mutuo ſecent in polis alterius circuli maximi, is per omnium illorum polos tranſibit.

78. Ut ſi duo puncta E, F, in quibus ſeſe mutuo ſecant duo circuli in ſphæra maximi AEDF, BECF, fuerint poli Fig. 12. Tab. 8. alterius circuli in ea maximi ABDC, peripheria circuli ABDC tranſibit per polos ipſorum AEDF, BECF. Cum enim circulus AEDF tranſeat per polos circuli ABDC, & uterque ſit maximus, poli circuli AEDF erunt in circulo ABDC. Eadem ratione in eodem circulo ABDC erunt poli circuli BECF; cum is quoque per polos ipſius circuli ABDC tranſeat. Ergo poli utriuſque circuli AEDF, BECF in circulo ABCD reperiuntur; adeoque &c. THEO-

(a) §. 71. (b) §. 76.

THEOREMA XIV.

Circulus in ſphæra maximus alterum in ea non maximum bifariam ſecans, orthogonaliter ipſum ſecat, & per illius polos tranſit.

In ſphæra ABEF circulus maximus ABEF alterum in illa non maximum C*b*E bifariam dividat. Theod. l.1.p.14

I.

79 Dico primo, circulum ABEF orthogonaliter ſecare circulum C*b*E.

Demonſtratio.

Enimvero, cum planum circuli ABEF bifariam dividat circulum C*b*E, tranſibit per illius centrum *d*. Cumque centrum ſphæræ ABF ſit etiam centrum ipſius circuli ABEF (a), recta *xd* ducta a centro *x* ſphæræ ad centrum *d* circuli C*b*E, erit in plano ipſius circuli ABEF. Eſt autem recta *xd*, ſive tota AD perpendicularis plano circuli C*b*E (b). Ergo planum quoque circuli ABEF erit plano circuli C*b*E perpendicularis (c), ipſumque proinde circulum C*b*E orthogonaliter ſecabit (d). Fig. 13. Tab. 8.

I I.

80. Dico 2, peripheriam circuli ABEF tranſire per polos circuli C*b*E.

Demonſtratio.

Oſtenſum eſt, rectam AD, quæ tranſit per centrum *d* cir-

(a) § 46.
(b) §. 43.
(c) Lib. VIII. §. 7.
(d) §. 28.

circuli C*b*E, ad perpendiculum ipſi circulo incumbere. Tranſibit ergo recta AD per polos ipſius circuli C*b*E, extrema nimirum illius puncta A, D erunt poli circuli C*b*E (a). Per hujuſmodi autem puncta A, D tranſit peripheria circuli ABEF; cum tota AD in hujuſce circuli plano conſiſtat. Ergo circulus ABEF tranſit per polos circuli C*b*E, quem biſariam dividit. Itaque circulus in ſphæra &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XV.

Si duo circuli in ſphæra maximi ſeſe mutuo oblique ſecent, diſtantia polorum eorundem erit angulo obliquitatis æqualis.

Fig. 12. Tab. 1. 81. Duo circuli in ſphæra maximi BECF, AEDF ſeſe mutuo in ea oblique ſecent. Sintque M, L poli circuli BECF, & H, N poli circuli AEDF; qui omnes erunt in peripheria ejuſdem circuli maximi ABC, cujus poli ſunt puncta ſectionum E, F (b). Dico, diſtantiam poli M a polo N, & poli L a polo H, æqualem eſſe arcui, qui metitur angulum obliquitatis BEA ipſorum circulorum BECF, AEDF.

Demonſtratio.

Cum enim circulus ABC tranſeat per polos M, L circuli BECF, ſimulque per polos N, H circuli AEDF, menſura anguli obliquitatis B*E*A erit arcus *B*A, & menſura anguli ad verticem oppoſiti DEC erit arcus DC ipſius circuli maximi ABC (c). Quoniam igitur punctum N eſt polus circuli AEDF, arcus AN erit quadrans circuli ABC (d). Eadem ratione, cum punctum M ſit polus circuli BECF, arcus MB erit quadrans ejuſdem circuli ABC. Omnes autem quadrantes ejuſdem circuli ſunt æquales. Ergo arcus AN æqualis erit arcui MB; ſublatoque proinde communi arcui AM, erit re-

(a) §. 61.
(b) §. 77.
(c) §. 54.
(d) §. 72.

reliquus MN reliquo AB æqualis (a). Eodem modo oſtendam, arcum HL æqualem eſſe arcui DC. Igitur diſtantia poli M a polo N æqualis eſt arcui BA, qui metitur angulum obliquitatis BEA, & diſtantia poli H a polo L arcum adæquat DC, qui angulum quoque metitur DEC eorundem circulorum BECF, AEDF. Itaque ſi duo circuli &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Si duo circuli in ſphæra maximi ſeſe mutuo oblique ſecent, eadem erit diſtantia polorum eorundem inter ſe mutuo.

82. Ut ſi puncta H, N ſint poli circuli maximi AEDF, & puncta M, L poli circuli itidem maximi BECF, oblique alterum AEDF in ſphæra ſecantis, diſtantia poli N a polo M æqualis erit diſtantiæ poli H a polo L. Cum enim anguli obliquitatis BEA, DEC, utpote ad verticem oppoſiti, ſint æquales (b), æquales erunt arcus BA, DC, qui ſunt illorum menſura. Conſtat eſt autem, arcum BA æqualem eſſe arcui MN, & arcum DC arcui HL, qui diſtantiam metiuntur polorum M, N * H, L a ſe mutuo. Ergo arcus quoque MN, HL ſunt inter ſe æquales (c); adeoque &c. Fig. 12. Tab. 8.

THEOREMA XVI.

Circuli in ſphæra æquales æqualiter ab illius centro diſtant. Et viciſſim, qui æqualiter a ſphæræ centro diſtant, ſunt æquales.

I.

83. In ſphæra ABDF duo habeantur circuli æquales B*a*F, C*b*E. Dico, eos æqualiter diſtare a centro *x* ipſius ſphæræ. Theod. L. 1. p. 6.

De-

(a) Syn. Algeb. §. 266.
(b) §. 56.
(c) Syn. Algeb. §. 259.

Demonſtratio.

Fig. 13. Tab. 8. Cum enim circuli B*a*F, C*b*E æquales ſint inter ſe, eorum diametri BF, C*E* erunt æquales (a). Rectæ autem in ſphæra æquales æqualiter ab illius centro diſtant (b). Ergo eadem erit diſtantia utriuſque diametri BF, C*E* a centro ſphęræ *x*. Manifeſtum porro eſt, rectas BF, *CE* tranſire per centra *a*, *d* circulorum B*a*F, *CbE* (c). Ergo eadem quoque erit diſtantia utriuſque centri *a*, *d* a centro ſphæræ *x* (d). adeoque etiam ipſorum circulorum B*a*F, *CbE* (e). Quippe hoc ipſo rectæ *xa*, *xd* ductæ a centro ſphæræ *x* in ipſa centra *a*, *d* ſunt æquales. Æquales itaque circuli &c.

II.

84. Viciſſim vero duo circuli B*a*F, *CbE* æqualiter diſtent a centro *x* ſphærę ABDF. Dico, illos eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Etenim, cum eadem ſit diſtantia utriuſque circuli *BaF*, *CbE* a centro ſphæræ *x*, rectæ *xa*, *xd* ductæ a centro ipſius ſphæræ in centra circulorum *a*, *d* erunt æquales (f). Quamobrem diametri *BF*, *CD* ipſorum circulorum *BaF*, *CbE* æqualiter diſtabunt a centro *x* ſphæræ (g). Rectæ namque *xa*, *xd* ad perpendiculum ipſis *BF*, *CE* inſiſtunt (h), cum ad perpendiculum incumbant planis circularibus *BaF*, *CbE* (i). In ſphæra autem rectæ illæ æquales ſunt inter ſe, quæ ęqualiter ab illius centro diſtant (k). Ergo diametri *BF*, *CE*, ac proinde ipſi quoque circuli *BaF*, *CbE*, ſunt ęquales (l). Itaque in ſphæra circuli &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

(a) Lib. IX. §. 50.
(b) Lib. XI. §. 118.
(c) Lib. VII. §. 7.
(d) Lib. V. §. 71.
(e) § 27.
(f) §. 27.
(g) Lib. XI §. 68.
(h) Lib. VIII. §. 2.
(i) §. 27.
(k) Lib. XI. §. 118.
(l) Lib. IX. §. 50.

THEOREMA XVII.

Circuli in ſphæra eo minores ſunt, quo magis ab illius centro diſtant.

85. In ſphæra A C ſint duo circuli *DE*, *BC* inæqualiter ab illius centro *F* diſtantes, ſit nimirum diſtantia circuli *B C* major; minor vero diſtantia circuli *DE*. Dico, circulum *BC* circulo *DE* minorem eſſe. Theod. l. 1. p. 6.

Demonſtratio.

Cum enim diſtantia circuli *BC* a centro ſphæræ *F* diſtantiam ſuperet circuli *DE* ab eodem centro, ſi a centro ſphæræ *F* ducantur in centra *a*, *b* ipſorum circulorum rectæ *Fa*, *Fb*, recta *Fa* major erit recta *Fb* (a). Sunt autem rectæ *Fa*, *Fb* perpendiculares ipſis circulis *BC*, *DE* (b), adeoque etiam eorum diametris *BC*, *DE* (c). Ergo diſtantia rectæ *BC* a centro *F* major erit, quam diſtantia rectæ *DE* ab eodem centro (d). In ſphæra autem illa recta linea minor eſt, quæ magis ab ipſius ſphæræ centro diſtat (e). Ergo recta *BC* minor erit recta *DE*. Eſt autem recta *BC* diameter circuli *BC*, & recta *DE* diameter circuli *DE*. Ergo circulus *BC* minor erit circulo *DE* (f). Itaque circuli &c. quod erit oſtendendum. Fig. 1. Tab. 9.

COROLLARIUM.

Circuli in ſphæra eo minores ſunt, quo illius polis ſunt viciniores.

86. Quo namque viciniores ſunt illius polis, eo magis ab ipſius ſphæræ centro diſtant.

THEO-

(a) §. 44.
(b) §. 43.
(c) Lib. VIII. §. 2.
(d) §. 27.
(e) Lib. XI. §. 119.
(f) Lib. IX. §. 50.

THEOREMA XVIII.

Circuli in ſphæra paralleli eoſdem polos habent. Et viciſſim circuli in ſphera eoſdem polos habentes, ſunt paralleli.

I.

Theod. 1.2.p.1. 87. In ſphæra *ABDF* ſint duo circuli paralleli *BF*, *CE*, ſintque duo puncta A, D *poli* circuli *BF*. Dico hujuſmodi puncta A, D *polos* quoque eſſe circuli *CE*.

Demonſtratio.

Fig. 13. Tab. 8. Cum enim recta AD conjungens *polos* circuli *BF* ad perpendiculum incumbat plano circuli *BF* (a) plano quoque circuli *CE* erit perpendicularis (b). Tranſit autem per centrum ſphæræ *ABCF* (c). *E*rgo tranſibit quoque per centrum circuli *CE* (d); deſinetque proinde utrinque producta in polos ipſius circuli *CE* (e) Deſinit autem in puncta A, D. *E*rgo hujuſmodi puncta erunt poli circuli *CE*. Sunt autem poli etiam circuli *BF* per hypotheſim. Igitur circulorum *BF*, *CE* iidem ſunt poli A, D; adeoque &c.

II.

Theod. 1.11.p.2. 88. Viciſſim vero circulorum *BF*, *CE* iidem ſint poli A, D. Dico, circulos *BF*, *CE* eſſe parallelos.

Demonſtratio.

Cum utriuſque circuli BF, CE iidem ex hypotheſi ſint poli A, D, idem quoque erit utriuſque axis AD (f). Axis autem

(a) §. 63.
(b) Lib. VIII §. 28.
(c) §. 64.
(d) §. 42.
(e) §. 61
(f) §. 12.

autem cujuſvis circuli in ſphæra plano ipſius circuli ad perpendiculum incumbit (a). Ergo recta AD perpendicularis erit plano utriuſque circuli BF, CE. Illa autem plana ſunt inter ſe parallela, quibus eadem recta linea perpendiculariter inſiſtit (b). Ergo circuli BF, CE ſunt inter ſe paralleli. Itaque circuli. &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Circuli in ſphæra paralleli eundem axim habent.

89. Cum enim horum circulorum iidem ſint poli, idem quoque erit axis (c).

COROLLARIUM II.

Circuli in ſphæra, quorum idem eſt axis, ſunt inter ſe paralleli.

90. Idem enim nequit eſſe circulorum axis, quin iidem itidem ſint eorum poli (d).

COROLLARIUM III.

Si poli ſphæræ ſint etiam poli unius circuli in ea deſcripti, erunt etiam poli omnium circulorum, qui ſunt illi paralleli.

91. Oſtenſum enim eſt, omnes circulos in ſphæra parallelos habere eoſdem polos.

COROLLARIUM IV.

Si axis ſphæræ ſit etiam axis unius circuli in illa deſcripti, erit etiam axis omnium illorum circulorum, qui ſunt illi paralleli.

92. Omnium ſiquidem circulorum in ſphæra parallelorum idem eſt axis (e).

(a) §. 65.
(b) Lib. VIII. § 25.
(c) §. 12.
(d) §. 9.
(e) §. 89.

COROLLARIUM V.

Omnes circuli in ſphæra, quorum poli diverſi non ſunt a polis ſphærę, ſunt inter ſe paralleli.

93. Omnes enim hoc ipſo habent eoſdem polos. Ergo ſunt paralleli.

COROLLARIUM VI.

Omnes circuli in ſphęra, quorum axis diverſus non eſt ab axe ſphęrę, ſunt inter ſe paralleli.

94. Idem ſiquidem tunc eſt omnium axis.

COROLLARIUM VII.

Circuli in ſphæra æqualiter diſtantes ab illius polis ſunt inter ſe paralleli.

Fig. 13. Tab. 8. 95. Ut ſi duo circuli BF, CE in ſphæra ABDF diſtantes ex æquo fuerint ab illius polis A, D, erunt inter ſe paralleli. Hi namque circuli habent hoc ipſo eoſdem polos A, D (a).

THEOREMA XIX.

Circulus in ſphęra maximus tranſiens per polos unius circuli in ipſa ſphęra, bifariam atque orthogonaliter omnes dividit circulos, qui ſunt ei paralleli.

Fig. 11. Tab. 8. 96. Circulus ABCD maximus in ſphæra ABCD tranſeat per polos A, C circuli BFDE. Dico, circulum ABCD bifariam, & orthogonaliter dividere circulum GH circulo BFDE parallelum.

De-

(a) §. 19.

Demonſtratio.

Cum enim circuli BFDE, GH ſint paralleli, iidem erunt ipſorum poli A, C (a). Tranſiens propterea circulus ABCD per polos circuli BFDE, tranſibit etiam per polos circuli GH. Circulus autem in ſphæra maximus tranſiens per polos unius in ea circuli, ipſum bifariam, & orthogonaliter dividit (b). Ergo circulus ABCD bifariam, & orthogonaliter ſecat circulum GH, omneſque alios eandem ob cauſam, qui ſunt circulo BFDE paralleli. Itaque circulus &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XX.

Circuli in ſphæra paralleli intercipiunt æquales arcus circulorum maximorum, qui per illorum polos tranſeunt.

97. In ſphæra *ABE* habeantur duo circuli paralleli *DE*, *BC*, per quorum polos *A*, *G* tranſeant duo circuli maximi *ABGE*, *AdGm*. Dico, horum maximorum circulorum arcus *BD*, *de*, *EC*, *mn*, quos duo ipſi circuli paralleli *DE*, *BC*, intercipiunt, eſſe inter ſe æquales. Fig. 1. Tab. 9.

Demonſtratio.

Cum enim circuli *ABGE*, *AdGm* ſint per hypotheſim in ſphæra maximi, æquales erunt inter ſe (c). Sunt autem ipſorum arcus *AD*, *AE*, *Am*, *Ad* inter ſe æquales, ſicuti etiam arcus *GB*, *GC*, *Ge*, *Gn* (d); cum puncta *A*, *G* ſint poli circulorum *DE*, *BC*. Ergo, illis ablatis, qui ſuperſunt, arcus *DB*, *EC*, *de*, *mn* erunt quoque inter ſe æquales (e). Itaque circuli &c. quod erat oſtendendum.

(a) §. 87.
(b) §. 71. 75.
(c) §. 51.
(d) §. 72.
(e) Syn. Algeb. §. 666.

THEOREMA XXI,

Circuli in ſphæra ęqualiter diſtantes a polis ipſius ſphæræ ſunt inter ſe æquales.

98. In ſphæra ABDF duo habeantur circuli BF, CE, qui æqualiter diſtent a polis A, D ipſius ſphæræ. Dico, illos eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Quoniam utriuſque circuli BF, CE iidem ſunt poli A, D (a), ducatur per polos ipſos A, D circulus ABDF, qui Fig. 11. Tab. 8. erit in ipſa ſphæra maximus (b). Tum in plano ipſius circuli a polo A ad peripheriam circuli BF ducantur rectæ AB, AF, quemadmodum etiam a polo D ad peripheriam circuli CE rectæ DC, DE. Quoniam igitur diſtantia circuli BF a polo A æqualis eſt diſtantiæ circuli CE a polo D, rectæ AB, AF æquales erunt tum inter ſe (c), tum rectis DC, DE (d). In circulo autem ęquales rectę ęquales arcus ſubtendunt (e). Ergo arcus AB, AF, DC, DE, atque adeo etiam arcus BAF, CDE, erunt inter ſe æquales. In eodem autem circulo æqualium arcuum æquales ſunt chordæ (f). Igitur rectę BF, CE erunt æquales, Conſtat porro, rectas BF, CE eſſe diametros circulorum BF, CE; cum circulus maximus ABDF bifariam dividat utrumque circulum BF, CE, ac proinde per illorum centrum tranſeat (g). Ergo circuli BF, CE ſunt æquales (h). Itaque circuli &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

(a) §. 19.
(b(§. 169.
(c) §. 14.
(d) §: 17.
(e) Lib. VII. §. 37.
(f) Ibidem §. 38.
(g) §. 75.
(h) Lib. IX. §. 50.

THEOREMA XXII.

Si duo circuli in ſphæra maximi ſeſe mutuo ad angulos rectos ſecuerint, quemlibet circulum circa puncta ſectionum deſcriptum in quatuor æquales partes dividunt.

99. Duo circuli in ſphæra maximi ABCD, AECF ſeſe mutuo dividant ad angulos rectos in punctis A, C. Deſcribatur autem circa punctum ſectionis A circulus BEDF. Dico, circulum ipſum BEDF, in quatuor æquales partes dividi a circulis ABCD, AECF. Fig. 14. Tab. I.

Demonſtratio.

Cum enim circulus BEDF deſcriptus ſit circa punctum A, duo ſectionum puncta A, C erunt poli ipſius circuli (a); cumque per ipſos tranſeant circuli ABCD, AECF, ambo quoque tranſibunt per centrum G ipſius circuli (b); eruntque propterea communes ſectiones, ſive rectæ BD, EF, diametri ejuſdem circuli BEDF (c). Duo autem circuli ABCD, AECF ſeſe mutuo ſecant ad angulos rectos. Ergo recti, ac proinde æquales inter ſe, erunt quatuor anguli BGF, BGE, EGD, FGD, quos in centro G circuli BEDF rectæ BD, EF conſtituunt. Quamobrem circulus BEDF in quatuor quadrantes ſectus erit a duobus circulis ABCD, AECF. Itaque ſi duo circuli &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXIII.

Si per polos plurium circulorum parallelorum ſphæræ ducantur duo circuli maximi, arcus ipſorum circulorum inter maximorum peripherias comprehenſi, ſunt ſibi mutuo ſimiles.

100. In ſphæra ACDE habeantur duo circuli paralleli BnF. CmE

(a) §. 7. (b) §. 67. (c) Lib. VII. §. 7.

Fig. 8. Tab. 9. C*m*E, per quorum polos A, D tranſeant duo circuli maximi ACDE, A*m*D*e*. Dico arcus B*n*, C*m* circulorum parallelorum B*nF*, C*m*E inter illos maximos circulos comprehenſos, eſſe ſibi mutuo ſimiles.

Demonſtratio.

Cum enim circuli B*n*F, C*m*E ſint paralleli, rectæ B*a*, C*x* erunt parallelæ, ſicuti etiam rectæ *na*, *mx* (a). Rurſus cum recta AD ad perpendiculum utrique circulo B*n*F, C*m*E incumbat (b), & per eorum centrum tranſeat (c), utpote quæ eſt utriuſque circuli axis (d), tam rectæ B*a*, C*x*, quam rectæ *na*, *mx* erunt ipſi AD perpendiculares; ac proinde anguli B*an*, C*xm* erunt inter ſe æquales (e). Eſt autem angulus B*an* in centro circuli BF, & angulus C*xm* in centro circuli CE. Ergo arcus B*n*, C*m* erunt ſibi mutuo ſimiles (f). Itaque ſi per polos &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXIV.

Duo circuli in ſphæra maximi ſeſe mutuo ſecantes ad angulos rectos, circulum maximum oblique ſe habentem ad puncta ſectionum, atque per polos unius ex illis tranſeuntem, in quatuor æquales partes dividunt.

101. In ſphæra ABDC ſpectentur duo circuli maximi ſeſe mutuo ſecantes ad angulos rectos ABDC, AEDF in punctis A, D. Per polos autem E, F circuli ABDC tranſeat
Fig. 12. Tab. 8. circulus itidem maximus BECF, oblique ſe habens ad puncta ſectionum A, D. Dico, circulum BECF in quatuor æquales partes dividi ab ipſis circulis ABDC, AEDF.

(a) Lib. VIII. §. 26.
(b) §. 65.
(c) §. 62.
(d) §. 89.
(e) Lib. VIII. §. 29.
(f) Lib. IX. §. 134.

De-

Demonſtratio.

Cum enim puncta E, F ſint poli circuli ABDC, eorum diſtantia a peripheria ipſius circuli æquabit quadrantem circuli maximi (a). Ergo quilibet arcus EB, EC, FB, FC erit quarta pars peripheriæ circuli BECF; atque adeo circulus BECF ſectus erit in quatuor quadrantes a duobus circulis ABDC, AEDF. Duo itaque circuli &c. quod erat oſtendendum.

ELE-

(a) §. 71.

Digitized by Google

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM
LIBER XIII.
De ſimilitudine, & ratione ſolidorum.

UT, quæ de *ſolidorum ſimilitudine*, & *ratione* dicturi ſumus, animum evidentius ſubeant, memoria repetantur, quæ lib. XI. de *ſolidorum geneſi* demonſtravimus.

DEFINITIO I.

1. *Solida ſimilia dicuntur illa, quę planis numero æqualibus, ſibique mutuo ſimilibus continentur.* Sic duo priſmata trilatera AF, *af*, quemadmodum etiam duæ pyramides itidem trilateræ DMF, *dmf*, ſunt corpora ſimilia; quia plana, quibus
Fig. 3. terminantur, numero æqualia ſunt, & inter ſe ſimilia, ni-
Fig. 4. mirum planum ADFC ſimile eſt plano *adfc*, planum ADEB
Tab. 9. plano *adeb*, planum BEFC plano *befc*, planum DEF plano *def*, & planum ABC plano *abc*. In pyramidibus quoque *DME*, *dme* ſimiles ſunt ſibi mutuo baſes *DEF*, *def*, ſicuti etiam triangula *DMF*, *dmf* * *DME*, *dme* * *EMF*, *emf*.

COROLLARIUM I.

2. *Anguli ſolidorum ſimilium, quos homologa plana conſtituunt, ſunt inter ſe ęquales.* Hi namque planis figura ſimilibus, & numero æqualibus continentur.

CO-

COROLLARIUM II.

3. *Omnia corpora regularia ejuſdem generis ſunt ſibi mutuo ſimilia.* Etenim plana, quibus regulare corpus clauditur, æqualia ſunt, & regularia (a). Omnes autem figuræ planæ regulares ejuſdem generis ſunt ſibi mutuo ſimiles (b). Ergo omnia ſolida regularia ejuſdem generis ſunt ſibi mutuo ſimilia (c).

COROLLARIUM III.

4. *Omnes cubi, omniaque tetrahedra, octahedra, dodecaedra, & icoſaedra ſunt reſpective inter ſe ſimilia.* Omnia enim ſunt corpora regularia (d).

COROLLARIUM IV.

5. *Quodlibet latus ſolidi regularis eſt homologum cuilibet lateri alterius ſolidi regularis ejuſdem generis.* Omnia enim plana, quibus corpus regulare terminatur, regularia ſunt, & inter ſe æqualia (e), ac proinde lateribus æqualibus terminata (f). Quodlibet autem latus figuræ regularis eſt homologum cuilibet lateri alterius figuræ regularis ejuſdem generis (g). Ergo &c.

DEFINITIO II.

6. *Duo cylindri, ſicuti etiam duo coni, ſuis baſibus ſimiliter inclinati dicuntur, cum ipſorum axes ſuis baſibus ſub æquali angulo inſiſtunt.* Sic duo cylindri *CFMD*, *cfmd*, quemadmodum etiam duo coni *COD*, *cod*, ſimiliter inclinati ſunt baſibus *CD*, *cd*; quia æquales ſunt anguli *OED*, *oed*, ſub quibus ipſorum axes *OE*, *oe* baſibus *CD*, *cd* incumbunt. Fig. 1. Fig. 6. Tab. 9.

(a) Lib. XI. §. 10.
(b) Lib. IX. §. 3.
(c) §. 1.
(d) Lib. XI. §. 10.
(e) Ibidem §. 10.
(f) Lib. V. §. 20.
(g) Lib. IX. §. 4.

DEFINITIO III.

7. ***Similes coni, & cylindri ſunt illi, quorum axes eandem ad baſium diametros, ſive radios rationem habent, ipſiſque baſibus ſunt ſimiliter inclinati.*** Similes nimirum erunt cylindri *ACDB*,
Fig. 5. Fig. 6. *acdb*, ſicuti etiam cylindri *FCDM*, *fcdm*, ſi ſub eodem an-
Tab. 9. gulo ipſorum axes *NE*, *ne*, aut *OE*, *oe* ſuis baſibus *CD*, *cd* inſtiterint, fueritque axis *NE* ad radium *ED* baſis *CD*, ut axis *ne* ad radium *ed* baſis *cd*, ſimiliter axis *OE* ad radium *ED*, ut axis *oe* ad radium *ed*. Idipſum dicito de conis *CND*, *cnd* * *COD*, *cod*.

COROLLARIUM I.

8. ***In conis, & cylindris ſimilibus axes ſunt directe inter ſe, ut ſuarum baſium diametri, & ſemidiametri.*** Ut ſi cylindrus ACDB ſimilis fuerit cylindro *acdb*, axis NE erit ad axim *ne*, ut eſt radius ED baſis CD ad radium *ed* baſis *cd*, ſicuti etiam ut diameter CD ad diametrum *cd*. Similiter ſi coni
Fig. 5. COD, *cod* ſimiles inter ſe fuerint, erit axis OE ad axim *oe*,
Fig. 6. ut eſt radius ED baſis CD ad radium *ed* baſis *cd*, utque dia-
Tab. 9. meter CD ad diametrum *cd*. Etenim ob ſimilitudinem ipſorum corporum erit axis NE ad radium ED, ut axis *ne* ad radium *ed*, ſicuti etiam axis OE ad radium ED, ut axis *oe* ad radium *ed* (a). Ergo *alternando* erit quoque axis NE ad axim *ne*, & axis OE ad axim *oe*, ut eſt radius ED ad radium *ed* (b); cumque ſit diameter CD ad diametrum *cd*, ut eſt radius ED ad radium *ed* (c), erit quoque axis NE ad axim *ne*, & axis OE ad axim *oe*, ut eſt diameter CD ad diametrum *cd* (d).

COROLLARIUM II.

9. *Si unus duorum cylindrorum, vel conorum ſimilium rectus fue-*

(a) §. 7.
(b) Lib. I. §. 135.
(c) Ibidem §. 127.
(d) Ibidem §. 78.

fuerit, alter quoque eorundem rectus erit. Cum enim ſint ſibi mutuo ſimiles, ſuis baſibus ſimiliter incumbunt.

DEFINITIO IV.

10. *Sphæra dicitur polyedro circumſcripta, cum ejus ſuperficies tranſit per apices omnium ſolidorum angulorum ipſius polyedri, & viciſſim polyedrum hac ratione in ſphæra conſiſtens, illi inſcriptum vocatur.* Sic ſphæra ABC dicitur circumſcripta polyedro ABC, & viciſſim polyedrum ABC ſphæræ ABC inſcriptum. Fig. 9. Tab. 9.

DEFINITIO V.

11. *Sphæra vero dicitur polyedro inſcripta, & viciſſim polyedrum ſphæræ circumſcriptum nuncupatur, cum ipſius ſphæræ ſuperficies omnia plana tangit, quibus polyedrum ipſum comprehenditur.* Sic ſphæra DEF inſcripta eſt polyedro DEF, & viciſſim polyedrum DEF eſt ſphæræ DEF circumſcriptum. Fig. 9. Tab. 9.

DEFINITIO VI.

12. *Centrum polyedri regularis eſt punctum ſumtum in illius area, quod eſt centrum tam ſphæræ illi circumſcriptæ, vel circumſcriptibilis, quam illi inſcriptæ, vel inſcriptibilis.* Hujusmodi eſt in polydero ABC punctum Z. Eſt enim centrum tam ſphæræ illi circumſcriptæ ABC, quam inſcriptæ DEF. Fig. 9. Tab. 9.

DEFINITIO VII.

13. *Radius polyedri regularis eſt recta quæcunque linea ducta ab illius centro ad apices omnium ſolidorum angulorum, quos polyedrum ipſum continet.* Sic rectæ ZA, ZM in polyedro regulari ACE ductæ ab illius centro Z ad apices ſolidorum angulorum A, M, ſunt illius radii. Fig. 7. Tab. 9.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

14. *Radius polyedri regularis ſphæræ inſcripti eſt radius ipſius ſphæræ*. Eſt enim recta ducta a ſphæræ centro ad illius ſuperficiem; cum idem ſit utriuſque ſolidi centrum (a), & ſphæræ ſuperficies per apices ſolidorum angulorum ipſius polyedri tranſeat (b).

COROLLARIUM II.

15. *Omnes radii polyedri regularis ſunt inter ſe æquales*. Diverſi namque non ſunt a radiis circumſcriptæ ſphæræ (c), qui omnes ſunt æquales (d).

COROLLARIUM III.

16. *Radius polyedri regularis ſphæræ circumſcripti eſt major ſemidiametro ipſius ſphæræ*. Cum enim apices angulorum circumſcripti polyedri extra inſcriptæ ſphæræ ſuperficiem poſiti ſint (e), radii ipſius polyedri extra ſphæræ ſuperficiem excurrunt.

DEFINITIO VIII.

17. *Catetus, ſive radius rectus polyedri regularis eſt recta ducta ab illius centro ad unum planorum, quibus clauditur, eique* Fig. 7. Tab. 9. *perpendiculariter inſiſtens*. Ut ſi recta ZN ducta a centro Z polyedri regularis ACE ad planum AMF, illi ad perpendiculum inſtiterit, recta ZN erit *catetus*, ſive *radius rectus* polyedri ACE.

COROLLARIUM I.

18. *Catetus polyedri regularis eſt recta minor ejusdem radio*. *Catetus* nempe ZN polyedri ACE eſt minor radio ZA ipſius po-

(a) §. 12.
(b) §. 10.
(c) §. 14.
(d) Lib. XI. §. 56.
(e) §. 50.

polyedri. Cum enim *catetus* ZN perpendiculariter inſiſtat plano AMF, minima eſt omnium rectarum, quæ ab eodem centro Z in idem planum AMF cadere poſſunt (a). Fig. 7. Tab. 9.

COROLLARIUM II.

19. *Catetus polyedri regularis ſphæræ inſcripti eſt minor ſemidiametro ipſius ſphæræ*. Eſt enim minor ipſius polyedri radio (b), qui ab ejusdem ſphæræ radio diverſus non eſt (c).

COROLLARIUM III.

20. *Cateti polyedri regularis ſunt altitudines pyramidum, in quas polyedrum quodcunque reſolvitur*. Sic catetus ZN polyedri ACE eſt altitudo pyramidis AZMF, quæ eſt una ex illis, in quas polyedrum ipſum reſolvi poteſt. Recta namque ZN eſt perpendicularis ducta a vertice Z ipſius pyramidis in ejusdem baſim AMF. Fig. 7. Tab. 9.

COROLLARIUM IV.

21. *Catetus polyedri regularis ſphæræ circumſcripti eſt radius ſphæræ inſcriptæ*. Nimirum *catetus* Z*a* polyedri regularis ABC ſphæræ DEF circumſcripti diverſus non eſt a radio ipſius ſphæræ. Etenim recta, ſive radius Z*a* ſphæræ DEF ductus a centro Z ad punctum *a*, in quo ipſa ſphæra inſcripta tangit faciem A*a* circumſcripti polyedri ABC, eſt ipſi plano perpendicularis (d). Fig. 9. Tab. 9.

COROLLARIUM V.

22. *Catetus polyedri regularis ſphæræ circumſcripti eſt minor cateto polyedri eidem ſphæræ inſcripti*. Etenim *catetus* polyedri ſphæræ circumſcripti eſt radius ipſius ſphæræ (e). *Catetus* autem

(a) Lib. VIII. §. 16.
(b) §. 18.
(c) §. 17.
(d) Lib. XI. §. 122.
(e) §. 21.

autem polyedri inſcripti eſt minor radio ſphæræ (a). Ergo minor quoque eſt *cateto* circumſcripti polyedri.

COROLLARIUM VI.

23. *Omnes cateti polyedri regularis ſunt inter ſe æquales.* Sunt namque radii inſcriptæ ſphæræ (b).

COROLLARIUM VII.

24. *Altitudines omnium pyramidum, in quas polyedrum regulare reſolvi poteſt, ſunt omnes inter ſe æquales.* Harum enim pyramidum altitudines ſunt *cateti* ipſius polyedri (c); cum earum quælibet ſit recta perpendicularis ducta a vertice in baſim.

THEOREMA I.

Si pyramis ſecetur plano baſi parallelo, pyramis truncata erit ſimilis toti pyramidi.

25. Pyramis ABCD ſecetur plano *abc* baſi BCD parallelo. Dico, pyramidem truncatam A*abc* ſimilem eſſe toti pyramidi ABCD.

Fig. 1. Tab. 8.

Demonſtratio.

Cum enim plana *abc*, BCD ſint parallela, ſectiones CD, *bc* erunt rectæ parallelæ (d). Igitur triangulum *b*A*c* ſimile erit triangulo CAD (e). Eadem ratione triangulum *a*A*b* ſimile erit triangulo BAC, & triangulum *a*A*c* triangulo BAD. Eſt autem etiam ſectio *abc* ſimilis baſi BCD (f). Ergo duæ pyramides A*abc*, ABCD ſimilibus planis, & quidem numero æqualibus continentur; atque adeo ſunt ſibi mutuo ſimiles (g). THEO-

(a) §. 19.
(b) §. 21.
(c) §. 17.
(d) Lib. VIII. §. 26.
(e) Lib. XI. §. 65.
(f) Lib. XI. §. 18.
(g) §. 1.

Digitized by Google

THEOREMA II.

Si conus ſecetur plano baſi parallelo, conus truncatus erit ſimilis toti cono.

26. Conus *bad* ſecetur plano *mn* baſi *bd* parallelo. Dico, conum truncatum *man* ſimilem eſſe toti cono *bad*.

Demonſtratio.

Secetur conus plano per verticem *a*, & per centrum *e* baſis traducto, ut proinde axis *ae* in ipſo plano ſectionis conſiſtat, ipſumque planum per centrum *z* transeat ſectionis *mn*. Quoniam igitur ſectio *mn* eſt circulus (a), & quidem parallelus baſi *bd*, communes ſectiones, ſive rectæ *mn*, *bd* erunt parallelæ (b); cumque planum ſecans per centrum utriuſque circuli *mn*, *bd* tranſeat, rectæ *bd*, *mn* erunt ipſorum circulorum diametri. Rurſus cum ſectio *bad* ſit triangulum planum rectilineum (c), & recta *mn* ſit baſi *bd* parallela, ſi ſpectetur triangulum *ead*, erit *ea*. *za* = *ed*. *zn* (d). Eſt autem *ed* ſemidiameter baſis *bd* coni *bad*, & recta *zn* ſemidiameter baſis *mn* coni *man*; recta vero *ae* eſt axis prioris coni, & recta *az* axis poſterioris. Ergo axes conorum *bad*, *man* ſunt inter ſe, ut eorundem baſium radii. Sunt autem coni ipſi ſuis baſibus ſimiliter inclinati (e); cum æquales ſint anguli inclinationis *azn*, *aed* (f). Ergo duo coni *man*, *bad* ſunt ſibi mutuo ſimiles (g). Itaque ſi conus &c. quod erat oſtendendum. Fig. 1. Tab. 1.

THEOREMA III.

Pyramides æqualium baſium, & altitudinum ſunt inter ſe æquales.

27. Duæ pyramides *abcd*, ABCD habeant æquales baſes

bcd

(a) Lib. XI. §. 91.
(b) Lib. VIII. §. 26.
(c) Lib. XI. §. 91.
(d) Lib. IX. §. 59.
(e) §. 6.
(f) Lib. IV. §. 14.
(g) §. 8.

Digitized by Google

bcd, BCD, & altitudines *an*, AN. Dico, eas eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio

Cum enim eadem ſit altitudo utriuſque pyramidis, idem
Fig. 1. erit in utraque componentium elementorum numerus (a).
Fig. 4. Tab. 1. Hæc inſuper elementa ſunt in utraque pyramide *reſpective* inter ſe æqualia, videlicet æqualia ſunt inter ſe, quæ in eadem altitudine ſumuntur, ut *efk*, EFK; cum ſectiones, quibus determinantur, ſint inter ſe æquales (b). Ergo pyramides *abcd*, ABCD ſunt inter ſe æquales (c). Itaque pyramides &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Coni æqualium baſium, & altitudinum ſunt æquales.

28. Sunt enim pyramides infinitorum laterum (d).

THEOREMA IV.

Omnis pyramis eſt tertia pars priſmatis habentis eandem baſim, & altitudinem.

I.

29. Eſto primo priſma triangulare EBC, cujus altitudo
Euclid. l. 11. p. 7. ſit recta FD. Sub æquali autem altitudine *ae* habeatur pyramis trilatera *abcd*, cujus baſis *bcd* ſit æqualis baſi BCD ipſius priſmatis. Dico, priſma EBC triplum eſſe pyramidis *abcd*.

Demonſtratio.

Secetur priſma EBC plano tranſeunte per punctum A, & per

(a) Lib. XI. §. 103.
(b) Ibidem §. 110.
(c) Lib. IX. §. 53.
(d) Lib. XI. §. 72.

per rectam BD, tum plano per idem punctum A, & per puncta E, D traducto, ita nimirum ut ſectio ſit diagonalis ED parallelogrammi EBDF. Diviſum erit priſma in tres pyramides triangulares BADC, BADE, EADF. Quoniam igitur altitudo pyramidis BADC diverſa non eſt ab altitudine priſmatis, adeoque etiam pyramidis *abcd*, pyramides BADC, *abcd* æqualem habebunt altitudinem. Habent autem etiam æquales baſes BCD, *bcd* per hypotheſim. Ergo pyramides BADC, *abcd* æquales erunt (a). Rurſus cum planum BEAC ſit parallelogrammum (b), ejuſque diagonalis ſit recta AB, triangula BAE, BAC erunt æqualia (c). Spectari autem poſſunt veluti baſes pyramidum BADC, BADE. Ergo duæ pyramides BADC, BADE baſes habent æquales. Sunt quoque ejusdem altitudinis; cum eadem recta ducta a communi apice D in commune planum EBCA utriuſque pyramidis altitudinem definiat. Ergo duæ pyramides BADC, BADE ſunt æquales (d). Eodem modo oſtendam, etiam duas pyramides ABCD, EDAF eſſe æquales. Igitur tres pyramides BADC, BADE, EDAF ſunt æquales inter ſe (e); ac proinde priſma ABD eſt triplum pyramidis ABDC. Oſtenſum eſt autem, pyramidem ABDC æqualem eſſe pyramidi *abcd*. Ergo priſma ABD pyramidis quoque *abcd* triplum erit (*f*). Fig. 10. Fig. 11. Tab. 9.

I I.

30. Sit modo priſma AGH pentagonam habens baſim FGHKM. Sub eadem autem altitudine habeatur pyramis *abd*, cujus baſis *bcdef* ſimilis ſit, & æqualis baſi FGHKM ipſius priſmatis. Dico, priſma AGH triplum eſſe pyramidis *abd*. Fig. 12. Fig. 13. Tab. 9.

Demonſtratio.

Quoniam pentagona FGHKM, *bcdef* ſimilia ſunt, & æqualia,

(a) §. 27.
(b) Lib. XI. §. 17.
(c) Lib. VI. §. 21.
(d) §. 27.
(e) Syn. Alg. §. 259.
(f) Lib. I. §. 112.

qualia, ductis rectis FH, MH, *fc*, *ec*, diviſa erunt in totidem triangula ſimilia, & æqualia, alterum alteri. Quamobrem diviſo priſmate AGH in tria priſmata triangularia ACHFGB, ACHFMEC, ECHMKD, ſectaque pyramide *abd* in tres pyramides itidem triangulares *afcb*, *afce*, *aced*, cum horum omnium ſolidorum eadem ſit altitudo, & duo triangula FGH, *fcb* ſint æqualia, priſma ACHFGB triplum erit pyramidis *afcb*, ut ſupra demonſtravimus. Priſma quoque ACHFME triplum erit pyramidis *afce*, & priſma ECHMKD pyramidis *aced*. Igitur totum priſma AGH triplum erit totius pyramidis *abd* (a). Omne igitur priſma &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Omnis conus eſt tertia pars cylindri ejusdem baſis, & altitudinis.

31. Conus nimirum CED eſt tertia pars cylindri ACDB
Euclid. l. 12. p. 10. Fig. 14. Tab. 9. habentis eandem baſim CD, & altitudinem EF. Cum enim omnis conus pro pyramide infinitangula (b), & omnis cylindrus pro priſmate infinitorum laterum ſpectari queat (c), ſicuti omnis pyramis eſt tertia pars priſmatis ejusdem baſis, & altitudinis, ita omnis conus erit tertia pars cylindri eandem quoque baſim, atque altitudinem habentis.

COROLLARIUM II.

Magnitudo, cujus elementa decreſcunt in ratione duplicata imminutæ altitudinis, eſt tertia pars illius, cujus elementa neutiquam minuuntur, dummodo eadem ſit utriuſque baſis, & altitudo.

32. Oſtenſum namque eſt, omnem pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis habentis eandem baſim, & altitudinem

(a) Lib. I. §. 144.
(b) Lib. XI. §. 72.
(c) Ibidem §. 70.

nem (a). Omnem quoque conum eſſe tertiam partem cylindri, dummodo eorum baſes, & altitudines ſint reſpective inter ſe æquales (b). Elementa autem pyramidis, & coni decreſcunt in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis (c), non ſic autem elementa priſmatis, & cylindri, quæ ſemper manent eadem (d). Ergo &c.

COROLLARIUM III.

Pyramides ſunt directe inter ſe, ut priſmata eandem cum illis habentia baſim, & altitudinem.

33. Pyramis nempe DMFE eam habet rationem ad pyramidem *dmfe*, quam habet priſma ADEC eandem habens baſim DEF, & altitudinem MN cum pyramide DMFE, ad priſma *adec* ejuſdem cum pyramide *dmfe* baſis *def*, & altitudinis *mn*. Pyramides enim DMFE, *dmfe* ſunt partes ſimiles priſmatum ADEC, *adec* (e), utpote in ratione *ſubtripla* ad ſuum priſma reſpective (f). Ergo, ut priſma ADEC ad priſma *adec*, ita erit pyramis DMFE ad pyramidem *dmfe* (g). Fig. 3. Fig. 4. Tab. 9.

COROLLARIUM IV.

Coni ſunt directe inter ſe, ut cylindri habentes eandem cum illis baſim, & altitudinem.

34. Ut ſi conus CED, & cylindrus ACDB eandem habeant baſim CD, & altitudinem EF, ſicuti etiam conus *ced*, & cylindrus *acdb*, erit conus CED ad conum *ced*, ut eſt cylindrus ACDB, ad cylindrum *acdb*. Eadem enim eſt ratio, nempe *ſubtripla*, utriuſque coni ad ſuum cylindrum (h). Fig. 14. Fig. 15. Tab. 9.

N 2 THEO-

(a) §. 29. 30.
(b) §. 31.
(c) Lib. XI. §. 94. 103.
(d) Ibid. §. 79. 85.
(e) Lib. I. §. 37.
(f) §. 29.
(g) Lib. I. §. 126.
(h) §. 31.

THEOREMA V.

Priſmata æqualium baſium, & altitudinum ſunt inter ſe æqualia.

35. Duo priſmata ADE, *ade* habeant æquales baſes DEF, *def*, & altitudines CF, *cf*. Dico, ea eſſe inter ſe ęqualia.

Demonſtratio.

Cum enim æquales ſint baſes DEF, *def*, utriuſque priſmatis elementa erunt magnitudine inter ſe æqualia (a). Sunt
Fig. 16. Fig. 17. Tab. 9. autem etiam numero ęqualia; cum tot in utroque ſint, quot in eorum altitudine habentur puncta (b). Ergo priſmata *adf*, ADF ſunt inter ſe ęqualia (c). Itaque priſmata &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Parallelepipeda æqualium baſium, & altitudinum ſunt æqualia.

36. Eſt enim parallelepipedum ſpecies priſmatis (d).

COROLLARIUM II.

Cylindri æqualium baſium, & altitudinum ſunt æquales.

37. Cylindrus namque eſt priſma infinitorum laterum (e).

COROLLARIUM III.

Planum diagonale dividit parallelepidum in duo æqualia priſmata.

38. Nimirum ęqualia ſunt priſmata ACFGHB, ACFGED, in

(a) Lib. XI. §. 77.
(b) Ibid. §. 79.
(c) Lib. IX. §. 55.
(d) Lib. XI. §. 23.
(e) Ibidem §. 70.

Digitized by Google

in quę dividitur parallelepipedum BE a plano diagonali ACFG. Cum enim diagonalis GF dividat parallelogrammum GHFE in duo triangula ęqualia GFH, GFE (a); duo priſmata ACFGHB, ACFGED æquales baſes habebunt. Habent autem eandem altitudinem, utpote quæ ab altitudine ipſius parallelepipedi diverſa non eſt. Ergo duo ipſa priſmata erunt æqualia (b) Fig. 2. Tab. 7.

COROLLARIUM IV.

Priſma triangulare eſt dimidium parallelepipedi ſuper dupla baſi, & ſub eadem altitudine conſtituti.

39. Videlicet priſma triangulare ACFGHB eſt dimidium parallelepipedi BE ſuper dupla baſi GHFE, & ſub eadem altitudine BH conſtituti. Patet ex præcedenti.

THEOREMA VI.

Priſmata ejusdem altitudinis ſunt directe inter ſe, ut eorum baſes.

40. Sint duo priſmata AEF, *aef*, quorum altitudines MN, *mn* æquales ſint inter, baſes vero DEF, *def* inæquales. Dico, priſma AEF eam habere rationem ad priſma *aef*, quam habet baſis DEF ad baſim *def*.

Demonſtratio.

Ponatur baſis DEF $=$ *xr*, baſis *def* $=$ *yu*, & utriuſque altitudo $=$ z. Erit ergo priſma AEF $=$ *xrz*, & priſma *def* $=$ *yuz*. Eſt autem *xrz*. *yuz* $=$ *xr*. *yu* (c). Ergo erit quoque priſma AEF ad priſma *aef*, ut eſt baſis DEF ad baſim *def*; adeoque priſmata &c. quod erat oſtendendum. Fig. 18. Fig. 19. Tab. 9.

CO-

(a) Lib. 6. §. 21. (b) §. 35. (c) Lib. I. §. 91.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Parallelepipeda ejuſdem altitudinis ſunt, ut baſes.

41. Omne namque parallelepipedum eſt priſma (a).

COROLLARIUM II.

Pyramides ejuſdem altitudinis ſunt, ut baſes.

42. Ut ſi altitudo MN pyramidis DMFE æqualis fuerit altitudini *mn* pyramidis *dmfe*, erit pyramis DMFE ad pyramidem *dmfe*, ut eſt baſis DEF ad baſim *def*. Pyramides namque DMFE, *dmfe* ſunt directe inter ſe, ut priſmata AEF, *aef* ſuper eaſdem baſes, & ſub iiſdem altitudinibus conſtituta (b).

Fig. 18. Fig. 19. Tab. 9. Euclid. l. 12. p. 6

COROLLARIUM III.

C lindri ejuſdem altitudinis ſunt, ut baſes.

43. Cylindrus nempe ABCD eam habet rationem ad cylindrum *abcd*, quam habet baſis BC ad baſim *bc*, ſi eorum altitudines EF, *ef* fuerint æquales. Spectari enim poſſunt, veluti priſmata infinitorum laterum (c).

Fig. 20. Fig. 21. Tab. 9. Euclid. l. 12. p. 11.

COROLLARIUM IV.

Coni æque alti ſunt, ut eorum baſes:

44. Ut ſi ęquales fuerint altitudines EF, *ef* conorum BEC, *bec*, erunt ipſi coni directe inter ſe, ut ipſorum baſes BC, *bc*. Coni namque BEC, *bec* ſunt inter ſe, ut cylindri

Fig. 20. Fig. 21. Tab. 9. Euclid. l. 12 p. 11

(a) Lib. XI. §. 23.
(b) §. 33.
(c) Lib. XI. §. 70.

lindri ABCD, *abcd* ſuper easdem baſes BC, *bc*, & ſub iisdem altitudinibus EF, *ef* conſtituti (a).

COROLLARIUM V.

Baſes priſmatum, pyramidum, cylindrorum, & conorum ejusdem altitudinis ſunt reſpective inter ſe, ut ipſa corpora directe.

45. Sicuti namque priſmata ejusdem altitudinis ſunt directe inter ſe, ut ipſorum baſes, ita viciſſim baſes priſmatum eandem altitudinem habentium erunt directe, ut ipſa priſmata. Idipſum dicito de pyramidibus, cylindris, & conis *reſpective*.

THEOREMA VII.

Priſmata æqualium baſium ſunt directe inter ſe, ut eorum altitudines.

46. Duo priſmata ABC, *abc* habeant æquales baſes BEC, *bec*, ſed inæquales altitudines MN, *mn*. Dico, priſma ABC eſſe ad priſma *abc*, ut eſt altitudo MN ad altitudinem *mn*. Fig. 1. F.g. 2. Tab. 10.

Demonſtratio.

Coincidit cum demonſtratione theorematis præcedentis.

COROLLARIUM I.

Parallelepipeda æqualium baſium ſunt directe; ut altitudines.

47. Quandoquidem omne parallelepipedum eſt priſma (b).

CO-

(a) 14.

(b) Lib. XI. §. 23.

COROLLARIUM II.

Pyramides æqualium baſium ſunt directe, ut altitudines.

48. Si nimirum æquales fuerint baſes BEC, *bec* pyrami-
Fig. 1. dum BMCE, *bmce*, pyramis BMEC erit ad pyramidem
Fig. 2. *bmec*, ut eſt altitudo MN ad altitudinem *mn*. Eſt enim
Tab. 10. pyramis BMEC ad pyramidem *bmec*, ut eſt priſma AEC ad priſma *aec*, quæ ſunt ſuper easdem baſes, & ſub iisdem altitudinibus conſtituta (a).

COROLLARIUM III.

Cylindri æqualium baſium ſunt directe inter ſe, ut ipſorum altitudines.

49. Ratio nimirum cylindri ABCD ad cylindrum æqua-
Fig. 3. lis baſis *abcd* diverſa non eſt a ratione altitudinis EF ad al-
Fig. 4. Tab. 10. titudinem *ef*. Cylindri namque ſunt priſmata infinitorum laterum (b).

COROLLARIUM IV.

Coni æqualium baſium ſunt, ut altitudines.

Fig. 3. 50. Videlicet conus BEC eſt ad conum *bec* ejuſdem baſis,
Fig. 4. ut eſt altitudo EF ad altitudinem *ef*. Eſt enim conus BEC
Tab. 10. ad conum *bec*, ut eſt cylindrus ABCD ad cylindrum *abcd* (c).

COROLLARIUM V.

Altitudines priſmatum, pyramidum, cylindrorum, & conorum æquales baſes habentium ſunt directe inter ſe, ut ipſa corpora reſpective.

51. Sicuti namque hujuſmodi corpora ſunt directe, ut al-

(a) §. 40. (b) Lib. XI. §. 70. (b) §. 34.

altitudines, ita viciſſim altitudines erunt, ut ipſa corpora.

COROLLARIUM VI.

Priſmata, pyramides, coni, & cylindri inæqualium baſium, & ejuſdem altitudinis, vel inæqualis altitudinis, & ejuſdem baſis ſunt magnitudine reſpective inter ſe inæquales.

52. Etenim in primo caſu ſunt directe inter ſe, ut baſes, in ſecundo, ut altitudines.

THEOREMA VIII.

Priſmata inæqualium baſium, & altitudinum ſunt directe inter ſe in ratione compoſita baſium, & altitudinum.

53. Sint duo priſmata AE, *ae*, quorum baſes DEF, *def* Fig 3. inæquales ſint inter ſe, ſicuti etiam altitudines MN, *mn*. Fig. 4. Dico, priſma AE eſſe ad priſma *ae* in ratione compoſita ex Tab. 9. ratione baſis DEF ad baſim *def*, & ex ratione altitudinis MN ad altitudinem *mn*.

Demonſtratio I.

Eſto baſis DEF$=px$, baſis *def*$=qx$, altitudo MN$=r$, & altitudo *mn*$=y$. Erit ergo priſma AE$=pxr$, & priſma *ae*$=qxy$. Eſt autem productum pxr ad productum qxy in ratione compoſita ex ratione primi termini px ad ſecundum qx, & ex ratione tertii r ad quartum y (a). Ergo priſma quoque AE erit ad priſma *ae* in ratione compoſita ex ratione baſis DEF ad baſim *def*, & ex ratione altitudinis MN ad altitudinem *mn*.

(a) Lib I. §. 168.

Demonſtratio II.

Priſma AE ſecetur plano *XZR* baſi *DEF* parallelo ad altitudinem *RF* æqualem altitudini *mn* priſmatis *ae*. Ponatur autem baſis *def* priſmatis *ae* eam habere rationem ad baſim *DEF* priſmatis *AE*, quam habet quantitas *x* ad quantitatem *y*, & altitudo PN, ſive *mn* ad altitudinem MN ponatur, ut quantitas *y* ad quantitatem *z*. Itaque cum priſmata *ae*, *RD* habeant per hypotheſim eandem altitudinem, erit priſma *ae* ad priſma *RD*, ut baſis *def* ad baſim *DEF* (a), ſive ut quantitas *x* ad quantitatem *y*. Eſt autem priſma *RD* ad priſma AE ejuſdem baſis, ut altitudo PN, ſive *mn* ad altitudinem MN (b), nempe ut quantitas *y* ad quantitatem *z*. Ergo ex *æqualitate rationis* erit priſma *ae* ad priſma AE, ut quantitas *x* ad quantitatem *z* (c). Manifeſtum porro eſt, primam *x* trium *x*, *y*, *z* eſſe ad tertiam *z* in ratione compoſita ex ratione primæ *x* ad ſecundam *y*, & ex ratione ſecundæ *y* ad tertiam *z* (d). Ergo priſma quoque *ae* erit ad priſma AE in ratione compoſita ex ratione quantitatis *x* ad quantitatem *y*, ſive baſis *def* ad baſim DEF, & ex ratione quantitatis *y* ad quantitatem *z*, ſeu altitudinis *mn* ad altitudinem MN. Itaque priſmata &c. quod erat oſtendendam.

COROLLARIUM I.

Parallelepipeda inæqualium baſium, & altitudinum ſunt inter ſe in ratione compoſita baſium, & altitudinum.

54. Omne enim parallelepipedum eſt priſma (e).

CO-

(a) §. 40.
(b) §. 46.
(c) Lib. I. §. 179.
(d) Ibidem §. 176.
(e) Lib. XI. §. 21.

COROLLARIUM II.

Cubi ſunt in ratione compoſita baſium, & altitudinum.

55. Etenim omnis cubus eſt parallelepipedum (a).

COROLLARIUM III.

Pyramides inæqualium baſium, & altitudinum ſunt in ratione compoſita baſium, & altitudinum.

56. Videlicet pyramides DME, *dme* inæqualium baſium DEF, *def*, & altitudinum MN, *mn* ſunt inter ſe in ratione compoſita ipſarum baſium, & altitudinum. Sunt enim, ut priſmata AE, *ae* ſuper eaſdem baſes, & ſub iiſdem altitudinibus conſtituta (b). Fig. 5. Fig. 4. Tab. 9.

COROLLARIUM IV.

Cylindri inæqualium baſium, & altitudinum ſunt in ratione compoſita baſium, & altitudinum.

57. Cylindrus nempe AD eſt ad cylindrum *ad* inæqualis baſis, & altitudinis in ratione compoſita ex ratione baſis CD ad baſim *cd*, & ex ratione altitudinis EF ad altitudinem *ef*. Cylindri namque ſunt priſmata infinitorum laterum (c). Fig. 14. Fig. 15. Tab. 9.

COROLLARIUM V.

Coni inæqualium baſium, & altitudinum ſunt in ratione compoſita baſium, & altitudinum.

58. Ratio ſcilicet conorum CED, *ced* inæqualium baſium CD, *cd*, & altitudinum EF, *ef* eſt compoſita ex ratione baſium Fig. 14. Fig. 15. Tab. 9.

(a) Lib. XI. §. 28. (b) §. 53. (c) Lib. XI. §. 70.

baſium CD, *cd*, & altitudinum EF, *ef*. Coni namque CED, *ced* ſunt directe inter ſe, ut cylindri AD, *ad* ſuper eaſdem baſes, & ſub iiſdem altitudinibus conſtituti (a).

THEOREMA IX.

Illa priſmata ſunt inter ſe æqualia, quæ reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines.

59. Sint duo priſmata AE, *ae*, quæ ſic ſe habeant, ut quam proportionem habet baſis CDE ad baſim *cde*, eandem Fig. 5. Fig. 6. Tab. 10. habeat altitudo *fh* ad altitudinem FH. Dico, priſmata AE, *ae* eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio I.

Ponatur baſis $CDE = mn$, baſis $cde = pq$, altitudo $fh = x$, & altitudo $FH = y$. Erit ergo per hypotheſim $mn . pq = x . y$; atque adeo $mny = pqx$ (b). Eſt autem priſma $AE = mny$, & priſma $ae = pqx$. Ergo erit quoque $AE = ae$ (c). Illa ergo priſmata &c.

Demonſtratio II.

Vel enim altitudines *FH*, *fh* æquales ſunt inter ſe, vel inæquales. Si ſunt æquales: ergo baſes quoque *CDE*, *cde* æquales erunt (d); cum ſit per hypotheſim baſis *CDE* ad baſim *cde*, ut altitudo *fh* ad altitudinem *FH*; atque adeo ipſa itidem priſmata *AE*, *ae* erunt æqualia (e). Si vero altitudines *FH*, *fh* ſunt inæquales, nempe altitudo *FH* major altitudine *fh*, ad altitudinem *ZH* altitudini *fh* æqualem ſecetur priſma *AE* plano *MNP* parallelo baſi *CDE*. Erit ergo priſma *ae* ad priſma *ME* ejuſdem altitudinis *ZH*, ut eſt baſis *cde* ad baſim *CDE* (f). Eſt autem baſis *cde* ad baſim *CDE*, ut al-

(a) §. 54.
(b) Lib. I. §. 82.
(c) Syn. Algeb. §. 259.
(d) Lib. I. §. 45.
(e) §. 55.
(f) §. 40.

Digitized by Google

altitudo *FH* ad altitudinem *fh*, ſive ad altitudinem *ZH* per hypotheſim. Ergo erit priſma *ae* ad priſma *ME*, ut altitudo *FH* ad altitudinem *ZH*. Conſtat autem, priſma quoque *AE* eſse ad priſma *ME* ejuſdem baſis *CDE*, ut eſt altitudo *FH* ad altitudinem *ZH*(a). Ergo utrumque priſma *AE*, *ae* eandem ad priſma *ME* rationem habet; duoque idcirco priſmata *AE*, *ae* ſunt inter ſe æqualia (d). Illa ergo priſmata &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Illa parallelepipeda ſunt æqualia inter ſe, quæ reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines.

60. Cum enim omne parallelepipedum ſit priſma (c), quod de priſmatibus oſtenſum eſt, parallelepipedis etiam convenit. Euclid. lib. 11. p. 14.

COROLLARIUM II.

Illæ pyramides ſunt æquales, quæ reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines.

61. Æquales nimirum erunt pyramides *CFE*, *cfe*, ſi baſis *CDE* fuerit ad baſim *cde*, ut eſt altitudo *fh* ad altitudinem *FH*. Sunt enim ipſæ pyramides, ut priſmata *AE*, *ae* ſuper eaſdem baſes, & ſub iiſdem altitudinibus conſtituta (d). Fig. 5. Fig. 6. Tab. 10.

COROLLARIUM III.

Cylindri, qui reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines, ſunt æquales.

62. Ut ſi ratio baſis *CD* cylindri *AD* ad baſim *cd* cylindri *ad* eadem fuerit, ac ratio altitudinis *ef* ad altitudinem *EF*, duo ipſi Euclid. l. 12. p. 15 Fig. 7. Fig. 8. Tab. 10.

(a) §. 46.
(b) Lib. I. §. 103.
(c) Lib. XI. §. 23.
(d) §. 33.

ipſi cylindri erunt æquales. Sunt enim priſmata infinitorum laterum (a).

COROLLARIUM IV.

Illi coni ſunt æquales, qui reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines.

Euclid. l.12p.15 Fig. 7. Fig. 8. Tab. 10. 63. Coni nimirum *ECD*, *ecd* æquales erunt inter ſe, ſi baſes *CD*, *cd* fuerint in ratione reciproca altitudinum *EF*, *ef*. Sunt enim coni *ECD*, *ecd*, ut cylindri *AD*, *ad* (b).

THEOREMA X.

Priſmata æqualia reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines.

Fig. 5. Fig. 6. Tab. 10. 64. Duo priſmata *AE*, *ae* ſint inter ſe æqualia. Dico, baſim *CDE* eſſe ad baſim *cde*, ut eſt altitudo *fh* ad altitudinem *FH*.

Demonſtratio I.

Ponatur baſis $CDE = mn$, baſis $cde = pq$, altitudo $fh = x$, & altitudo $FH = y$. Erit ergo priſma $AE = mny$, & priſma $ae = pqx$. Quamobrem cum ſit per hypotheſim $AE = ae$; erit quoque $mny = pqx$ (c). Eſt autem mny productum extremarum mn, y, & factum pqx eſt productum mediarum pq, x. Ergo erit $mn . pq = x . y$ (d), atque adeo baſis *CDE* ad baſim *cde*, ut eſt *reciproce* altitudo *fh* ad altitudinem *FH*.

Demonſtratio II.

Quandoquidem altitudines *FH*, *fh* vel æquales ſunt inter ſe,

(a) Lib. XI. §. 70.
(b) §. 34.
(c) Syn. Algeb. §. 259.
(d) Lib. I. §. 14.

ſe, vel inæquales. Si ſunt æquales, cum per hypotheſim priſmata ſint æqualia, æquales erunt etiam baſes CDE, *cde* (a); ac proinde baſes ipſæ erunt in ratione *reciproca* altitudinum. Si vero altitudines ſunt inæquales, priſma AE majoris altitudinis ſecetur plano MNP baſi CDE parallelo ad altitudinem ZH altitudini *fh* æqualem. Itaque cum priſmata ME, *ae* ſint ejuſdem altitudinis, baſis *cde* erit ad baſim CDE, ut eſt ſolidum *ae* ad ſolidum ME (b), ſive ut ſolidum AE ad ſolidum ME (c), ob æqualitatem ſcilicet ſolidorum AE, *ae*. *Eſt* autem priſma AE ad priſma ME ejuſdem baſis, ut altitudo FH ad altitudinem ZH (d). Ergo baſis quoque *cde* erit ad baſim CDE, ut altitudo FH ad altitudinem ZH (e), ſive ut altitudo FH ad altitudinem *fh* (f). Itaque priſmata æqualia &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Parallelepipeda æqualia reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines,

65. Omne ſiquidem parallepipedum eſt priſma (g). Euclid. l. 11 p. 34

COROLLARIUM II.

Pyramides æquales reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines.

66. Si nimirum pyramides FCE, *fce* æquales fuerint, baſes CDE, *cde* erunt in ratione reciproca altitudinum FH, *fh*. Ipſæ namque pyramides ſunt, ut priſmata AE, *ae* (h). Euclid. l. 12 p. 9. Fig. 5. Fig. 6. Tab. 10.

CO-

(a) §. 40.
(b) §. 45.
(c) Lib. I. §. 112.
(d) § 46.
(e) Lib. I. §. 78.
(f) Ibidem §. 112.
(g) Lib. XI. §. 23.
(h) §. 33.

COROLLARIUM III.

Cylindri æquales reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines.

Euclid. l.12p.15 Fig. 7. Fig. 8. Tab. 10. 67. Videlicet ſi duo cylindri AD, *ad* æquales fuerint, baſis CD erit ad baſim *cd*, ut eſt reciproce altitudo *ef* ad altitudinem EF. Spectari enim poſſunt ipſi cylindri, veluti priſmata infinitorum laterum (a).

COROLLARIUM IV.

Coni æquales reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines.

Fig. 7. Fig. 8. Tab. 10. 68. Baſes nimirum CD, *cd* conorum æqualium ECD, *ecd* erunt in ratione reciproca altitudinum EF, *ef*. Sunt enim coni ipſi, ut cylindri AD, *ad* (b).

THEOREMA XI.

Parallelepipedum rectangulum factum ex tribus rectis lineis continuo proportionalibus eſt æquale cubo mediæ.

69. Sint tres rectæ lineæ continuo proportionales A, B, C, Euclid. l.11p.36 ex quibus fiat parallelepipedum rectangulum DH, ita nimirum ut ejus baſis DEFG ſit rectangulum contentum ſub extremis A, C, altitudo vero HE ſit media B. Ex eadem autem media B fiat cubus KP. Dico, parallelepipedum DH eſſe æquale cubo KP.

Demonſtratio.

Cum enim tres rectæ A, B, C ſint continuo proportionales re-

(a) Lib. XI. § 70. (b) §. 14.

rectangulum DEFG contentum ſub extremis A, C erit æquale quadrato KLMN mediæ B (a). Hæc autem quadrilatera ſunt baſes ſolidorum DH, KP. Ergo duo parallelepipeda DH, KP habent baſes æquales. Habent autem altitudines quoque HF, PM æquales inter ſe, utpote æquales mediæ B. Ergo duo parallelepipeda DH, KP erunt æqualia (b). Itaque parallelepipedum &c. quod erat oſtendendum. Fig. 9. Fig. 10. Tab. 10.

S C H O L I O N.

70. Porro obſervare plurimum intereſt cum viro Cl. P. Andrea Tacqueto, *ex tribus rectis lineis continuo proportionalibus quomodocunque inter ſe multiplicatis ſolidum ejuſdem ſemper magnitudinis conſurgere*. Sint enim tres rectæ lineæ continuo proportionales *a*, *b*, *c*. Solida, quæ ex illarum multiplicatione inter ſe mutuo fieri poſſunt, ſint *abc*, *cab*, *bca*, in quibus duæ primæ literæ exprimant baſim, tertia altitudinem. Quoniam igitur eſt *ab*. *ca* $=$ *b*. *c* (c), baſis *ab* ſolidi *abc* erit ad baſim *ca* ſolidi *cab reciproce*, ut altitudo *b* poſterioris ad altitudinem *c* prioris. Ergo duo ſolida *abc*, *cab* ſunt æqualia (d). Eadem ratione erit *cab* $=$ *bca*, cum ſit *ca*. *bc* $=$ *a*. *b*. Ergo erit *abc* $=$ *cab* $=$ *bca* (e).

T H E O R E M A XII.

Omnia latera homologa planorum, quibus ſimilia ſolida continentur, eandem inter ſe rationem habent.

71. Sint duo ſolida ſimilia ACE, *ace* planis terminata AMF, *amf* * FME, *fme* &c. Dico, omnia latera homologa planorum ſimilium, quibus continentur, eandem inter ſe rationem habere, nimirum eſſe AF. *af* $=$ ME. *me* &c. Fig. 7. Fig. 8. Tab. 9.

(a) Lib. IX. §. 111.
(b) §. 55.
(c) Lib. I. §. 93.
(d) §. 59.
(e) Syn. Algeb. §. 219.

Demonſtratio.

Quoniam plana AMF, *amf* ſunt ſimilia, & latera ipſorum homologa AF, *af* * FM, *fm* * AM, *am*, erit AF. *af* = MF. *mf*. (a). Eadem ratione, cum ſimilia ſint plana MFE, *mfe*, & latera MF, *mf* * ME, *me* ſint homologa, habebitur ME. *me* = MF. *mf*. Ergo erit ME. *me* = AF. *af* (b). Eodem modo demonſtrabitur FE. *fe* = AF. *af*, atque ita de ceteris, omnia ſcilicet hujuſmodi latera homologa eſſe *directe* inter ſe, ut duo quælibet AF, *af*; ac proinde eandem omnium eſſe rationem. Itaque omnia &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XIII.

Altitudines priſmatum, & pyramidum ſimilium, quorum baſes ſint duo ipſorum plana ſimilia, ſunt directe inter ſe, ut duo quælibet latera homologa planorum, quibus terminantur.

I.

Fig. 3. Fig. 4. Tab. 9. 72. Sint duo priſmata ſimilia AEF, *aef*, quorum baſes DEF, *def* ſint duo plana ipſorum ſimilia. Dico, eorum altitudines eſſe directe inter ſe, ut duo quælibet homologa latera EF, *ef* planorum, quibus terminantur.

Demonſtratio.

Etenim, ſi duo illa priſmata ad perpendiculum ſuis baſibus DEF, *def* incumbunt, cum eorum altitudines tunc diverſæ non ſint a lateribus homologis CF, *cf* planorum ſimilium BEFC, *befc* (c), ſitque horum omnium laterum eadem ratio

(a) Lib. IX §. 77.
(b) Lib. I. §. 76.
(c) Lib. XI. §. 21.

ratio (a), remanet aperte, eſſe CF. *cf* = EF. *ef*. Si vero ſint ad baſim inclinata, qua ratione ad baſes DEF, *def* ſe habent ſolida DM*E*, *dme*, ut proinde eorum altitudines ſint rectæ MN, *mn*, ſuper eaſdem baſes DEF, *def*, & ſub altitudinibus CF, *cf*, quæ ſint ipſis MN, *mn* æquales, conſtituantur duo ſimilia priſmata AF, *af* ſuis baſibus ad perpendiculum inſiſtentia. Cum igitur ſit ex hypotheſi MN = CF, *mn* = *cf*, erit MN. *mn* = CF. *cf*. Eſt autem CF. *cf* = EF. *ef*, ut modo demonſtravimus. Ergo erit quoque MN. *mn* = *E*F. *ef* (b), nimirum altitudines, ut duo homologa latera baſium ſimilium. Igitur altitudines ipſæ erunt itidem, ut duo quælibet planorum ſimilium, quibus priſmata ipſa continentur, homologa latera.

II.

73. Sint duæ pyramides ſimiles DMF*E*, *dmfe*, quarum baſes ſint plana ſimilia DEF, *def*, altitudines vero MN, *mn*. Dico, altitudines MN, *mn* eſſe *directe* inter ſe, ut duo quælibet homologa latera EF, *ef* ſimilium planorum DEF, *def*, quibus ipſæ pyramides terminantur. Fig. 1. Fig. 4. Tab. 9.

Demonſtratio.

Si namque ſuper eaſdem baſes, & ſub iiſdem altitudinibus conſtituantur duo priſmata ſimilia AF, *af*, evidens eſt, altitudines MN, *mn* eſſe *directe* inter ſe, ut duo latera EF, *ef* (c). Ergo altitudines MN, *mn* pyramidum ſimilium ME, *me* ſunt inter ſe, ut duo homologa latera EF, *ef* ſuarum baſium; atqueadeo ut duo quælibet latera aliorum planorum ſimilium, quibus pyramides ipſæ continentur; cum ſcilicet horum omnium laterum eadem ſit ratio (d). Itaque altitudines &c. quod erat oſtendendum.

(a) Lib. IX. §. 77.
(b) Lib. I. §. 77.
(c) §. 72.
(d) §. 71.

COROLLARIUM I.

Baſes priſmatum, & pyramidum ſimilium, ſi ſint plana ſimilia, ſunt in ratione duplicata ſuarum altitudinum; & viciſſim altitudines in ratione ſubduplicata baſium.

74. Baſis nimirum DEF pyramidis ME erit ad baſim ſibi ſimilem *def* ſimilis pyramidis *me* in ratione *duplicata* altitudinis MN ad altitudinem *mn*; & viciſſim altitudines MN, *mn* in ratione *ſubduplicata* baſium. Conſtat enim, baſim DEF eſſe ad baſim *def* in ratione *duplicata* lateris EF ad latus ſibi homologum *ef* (a), & viciſſim latus EF ad latus *ef* in ratione *ſubduplicata* baſis DEF ad baſim *def* (b). Eſt autem MN.*mn* ∷ EF. *ef*. Ergo &c. Idipſum dicito de priſmatibus ſimilibus.

COROLLARIUM II.

Baſes priſmatum, atque pyramidum ſimilium, ſi ſint plana eorum ſimilia, ſunt, ut quadrata altitudinum; & viciſſim quadrata altitudinum, ut eorundem baſes.

75. Quadrata namque altitudinum ſunt in ratione ipſarum *duplicata* (c).

COROLLARIUM III.

Baſes parallelepipedorum ſimilium ſunt in ratione duplicata ſuarum altitudinum, atque adeo ut earundem quadrata.

76. Etenim omne parallelepipedum eſt priſma (d).

THEO-

(a) Lib. IX. §. 180.
(b) Ibidem §. 182.
(c) Ibidem §. 172.
(d) Lib. XI. §. 21.

THEOREMA XIV.

Altitudines cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt directe inter ſe, ut ſuarum baſium radii.

I.

77. Sint duo cylindri ſimiles AD, *ad* ſuis baſibus CD, *cd* ad perpendiculum inſiſtentes, vel illis ſimiliter inclinati, ut FD, *fd*. Dico, ipſorum altitudines NE, *ne*, vel OR, *or* eſſe *directe* inter ſe, ut radii CE, *ce* ſuarum baſium. Fig. 5. Fig. 6. Tab. 9.

Demonſtratio.

Cum enim in cylindris perpendicularibus AD, *ad* altitudines NE, *ne* ab eorum axibus non differant (a), altitudines erunt inter ſe, ut axes. Axes autem ſunt, ut baſium radii (b). Ergo in hac eadem itidem ratione erunt altitudines. In cylindris vero inclinatis FD, *fd*, cum ob ſimilitudinem ipſorum cylindrorum anguli inclinationis OER, *oer* ſint æquales (c), & anguli ORE, *ore* ſint recti (d), adeoque æquales (e), reliquus angulus EOR in triangulo EOR æquabit reliquum angulum *eor* in triangulo *eor* (f); ac proinde duo triangula EOR, *eor*, utpote æquiangula, erunt ſibi mutuo ſimilia (g). Igitur homologa latera, ſive altitudines OR, *or*, erunt inter ſe, ut latera homologa OE, *oe*, nempe ut axes (h). Axes autem OE, *oe* ſunt, ut baſium radii CE, *ce* (i). Ergo in eadem quoque ratione radiorum erunt altitudines OR, *or* (k).

II.

(a) Lib. XI. §. 19.
(b) §. 8.
(c) §. 6.
(d) Lib. V. §. 24.
(e) Lib. III. §. 37.
(f) Lib. V. §. 46.
(g) Lib. IX. §. 46.
(h) Ibidem §. 77.
(i) §. 8.
(k) Lib. I. §. 77.

II.

78. Sint duo coni ſimiles CND, *cnd* erecti, vel COD; Fig. 5. *cod* ſuis baſibus CD, *cd* inclinati. Dico, altitudines NE, Fig. 6. Tab. 9. *ne*, vel OR, *or* eſſe *directe* inter ſe, ut radii CE, *ce* ſuarum baſium.

Demonſtratio.

Eadem eſt in utroque caſu cum præcedenti. Itaque altitudines &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Altitudines cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt directe inter ſe, ut diametri ſuarum baſium.

79. Circulorum namque diametri ſunt *directe* inter ſe, ut eorundem radii (a).

COROLLARIUM II.

Baſes cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt in ratione duplicata altitudinum; & viciſſim altitudines in ratione ſubduplicata baſium.

80. Quandoquidem circuli ſunt in ratione *duplicata* ſuarum diametrorum (b), & viciſſim diametri in ratione ipſorum *ſubduplicata* (c). Ratio autem altitudinum in cylindris, & conis ſimilibus diverſa non eſt a ratione diametrorum ſuarum baſium. Ergo &c.

CO-

(a) Lib. I. §. 127.
(b) Lib IX §. 186.
(c) Ibidem §. 192.

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

Baſes cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt inter ſe, ut quadrata altitudinum; & viciſſim quadrata altitudinum, ut baſes.

81. Conſtat enim, quadrata altitudinum eſſe inter ſe in ratione ipſarum *duplicata* (a).

THEOREMA XV.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt directe inter ſe in ratione duplicata diametrorum ſuarum baſium.

I.

82. Sint duo cylindri ſimiles AD, *ad*. Dico, totam cylindri AD ſuperficiem eſſe ad totam ſuperficiem cylindri *ad* in ratione *duplicata* diametrorum CD, *cd* ſuarum baſium. Fig. 11. Fig. 12. Tab. 10.

Demonſtratio.

Eſto EMNF unum ex illis parallelogrammis infinitæ parvæ latitudinis, quibus cylindrica ſuperficies ACDB terminatur (b), & *emnf* ſit unum ex illis itidem parallelogrammis, quibus cylindrica ſuperficies *acdb* comprehenditur. Quoniam igitur duo cylindri ſunt per hypotheſim ſibi mutuo ſimiles, omniſque cylindrus ſit priſma infinitorum laterum (c), duo cylindri AD, *ad* ſpectari poſſunt veluti duo priſmata ſimilia, totidem idcirco ſimilibus planis comprehenſa (d). Duo ergo ex his parallelogrammis ſimilibus ſint EFMN, *efmn*. Cum igitur hæc ſint in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum MN, *mn* (e), & duo latera MN, *mn* ſint inter ſe,

(a) Lib. IX. §. 172.
(b) Lib. XI. §. 71.
(c) Ibidem §. 70.
(d) §. 1.
(e) Lib. IX. §. 170.

ſe, ut diametri CD, *cd* (a); cum ſint arcus ſimiles, licet infinite parvi, peripheriarum CMD, *cmd*, duo plana EFMN, *efmn* erunt in ratione *duplicata* diametrorum CD, *cd*. Hæc porro plana EFMN, *efmn* ſunt partes aliquotæ ſimiles cylindricarum ſuperficierum ACDB, *acdb* per hypotheſim. Ergo cylindrica quoque ſuperficies ACDB erit ad cylindricam ſuperficiem *acdb* in ratione *duplicata* diametri CD ad diametrum *cd* (b).

I I.

Fig. 13. Fig. 14 Tab. 10. 83. Sint duo ſimiles coni BAE, *bae*. Dico, conicas hujuſmodi ſuperficies eſſe directe inter ſe in ratione *duplicata* diametrorum BE, *be* ſuarum baſium.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum præcedenti. Ut enim ſimilium cylindrorum ſuperficies ex ſimilibus parallelogrammis, ita ſimilium conorum ſuperficies ex totidem ſimilibus triangulis conſurgunt (c). Erit ergo conica ſuperficies BAE ad conicam ſuperficiem *bae*, ut triangulum infinite parvum CAD ad triangulum ſibi ſimile *cad* (d). Sunt autem hujuſmodi triangula in ratione duplicata laterum homologorum, ſive arcuum ſimilium CD, *cd* (e); proinde diametrorum BE, *be* (f). Ergo in eadem quoque ratione erunt conicę ipſæ ſuperficies BAE, *bae* (g). Superficies itaque cylindrorum &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

84. Si cylindricę ſuperficies ſumantur una cum circulis, quibus ipſi cylindri terminantur, & ſuperficies conicæ una cum baſium circulis itidem ſpectentur, ipſa adhuc tota aſ-

ſertio

(a) Ibidem §. 156.
(b) Lib. I. §. 127.
(c) Lib. XI. §. 73.
(g) Lib. I. §. 77.
(d) Lib. I. §. 127.
(e) Lib. IX. §. 166.
(f) Ibidem §. 156.

ſertio manifeſta eſt. Sunt enim circuli in ratione ſuarum diametrorum *duplicata* (a).

COROLLARIUM I.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt reſpective inter ſe, ut quadrata diametrorum ſuarum baſium.

85. Hujuſmodi enim quadrata ſunt, quemadmodum ipſæ cylindricæ, & conicæ ſuperficies, in ratione ipſarum diametrorum *duplicata* (b).

COROLLARIUM II.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt in ratione duplicata, tum axium, tum altitudinum.

86. Axes namque, & altitudines cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt directe inter ſe, ut diametri baſium (c).

COROLLARIUM III.

Similium cylindrorum, & conorum ſuperficies ſunt, ut quadrata axium, & altitudinum.

87. Sunt enim ejuſmodi quadrata in ratione ipſorum axium, & altitudinum *duplicata* (d).

COROLLARIUM IV.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt directe, ut circuli baſium, & viciſſim circuli baſium, ut ſuperficies.

88. Conſtat enim, circulos baſium eſſe inter ſe in ratione ſua-

(a) Lib. IX. §. 116.
(b) Lib. IX. §. 172.
(c) §. 8.
(d) Lib. IX. §. 172.

Digitized by Google

ſe, ut diametri CD, *cd* (a); cum ſint arcus ſimiles, licet infinite parvi, peripheriarum CMD, *cmd*, duo plana EFMN, *efmn* erunt in ratione *duplicata* diametrorum CD, *cd*. Hæc porro plana EFMN, *efmn* ſunt partes aliquotæ ſimiles cylindricarum ſuperficierum ACDB, *acdb* per hypotheſim. Ergo cylindrica quoque ſuperficies ACDB erit ad cylindricam ſuperficiem *acdb* in ratione *duplicata* diametri CD ad diametrum *cd* (b).

I I.

Fig. 13. Fig. 14. Tab. 10. 83. Sint duo ſimiles coni BAE, *bae*. Dico, conicas hujuſmodi ſuperficies eſſe directe inter ſe in ratione *duplicata* diametrorum BE, *be* ſuarum baſium.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum præcedenti. Ut enim ſimilium cylindrorum ſuperficies ex ſimilibus parallelogrammis, ita ſimilium conorum ſuperficies ex totidem ſimilibus triangulis conſurgunt (c). Erit ergo conica ſuperficies *BAE* ad conicam ſuperficiem *bae*, ut triangulum infinite parvum *CAD* ad triangulum ſibi ſimile *cad* (d). Sunt autem hujuſmodi triangula in ratione duplicata laterum homologorum, ſive arcuum ſimilium *CD*, *cd* (e); proinde diametrorum *BE*, *be* (f). Ergo in eadem quoque ratione erunt conicę ipſæ ſuperficies *BAE*, *bae* (g). Superficies itaque cylindrorum &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

84. Si cylindricę ſuperficies ſumantur una cum circulis, quibus ipſi cylindri terminantur, & ſuperficies conicæ una cum baſium circulis itidem ſpectentur, ipſa adhuc tota aſ-

ſertio

(a) Ibidem §. 156.
(b) Lib. I. §. 127.
(c) Lib. XI. §. 73.
(g) Lib. I. §. 77.
(d) Lib. I. §. 127.
(e) Lib. IX. §. 166.
(f) Ibidem §. 156.

ſertio manifeſta eſt. Sunt enim circuli in ratione ſuarum diametrorum *duplicata* (a).

COROLLARIUM I.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt reſpective inter ſe, ut quadrata diametrorum ſuarum baſium.

85. Hujuſmodi enim quadrata ſunt, quemadmodum ipſæ cylindricæ, & conicæ ſuperficies, in ratione ipſarum diametrorum *duplicata* (b).

COROLLARIUM II.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt in ratione duplicata tum axium, tum altitudinum.

86. Axes namque, & altitudines cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt directe inter ſe, ut diametri baſium (c).

COROLLARIUM III.

Similium cylindrorum, & conorum ſuperficies ſunt, ut quadrata axium, & altitudinum.

87. Sunt enim ejuſmodi quadrata in ratione ipſorum axium, & altitudinum *duplicata* (d).

COROLLARIUM IV.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt directe, ut circuli baſium, & viciſſim circuli baſium, ut ſuperficies.

88. Conſtat enim, circulos baſium eſſe inter ſe in ratione ſua-

(a) Lib. IX. §. 186.
(b) Lib. IX. §. 172.
(c) §. 8.
(d) Lib. IX. §. 172.

II.

78. Sint duo coni ſimiles CND, *cnd* erecti, vel COD; Fig. 5. *cod* ſuis baſibus CD, *cd* inclinati. Dico, altitudines NE, Fig. 6. Tab. 9. *ne*, vel OR, *or* eſſe *directe* inter ſe, ut radii CE, *ce* ſuarum baſium.

Demonſtratio.

Eadem eſt in utroque caſu cum præcedenti. Itaque altitudines &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Altitudines cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt directe inter ſe, ut diametri ſuarum baſium.

79. Circulorum namque diametri ſunt *directe* inter ſe, ut eorundem radii (a).

COROLLARIUM II.

Baſes cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt in ratione duplicata altitudinum; & viciſſim altitudines in ratione ſubduplicata baſium.

80. Quandoquidem circuli ſunt in ratione *duplicata* ſuarum diametrorum (b), & viciſſim diametri in ratione ipſorum *ſubduplicata* (c). Ratio autem altitudinum in cylindris, & conis ſimilibus diverſa non eſt a ratione diametrorum ſuarum baſium. Ergo &c.

CO-

(a) Lib. I. §. 127.
(b) Lib IX §. 126.
(c) Ibidem §. 192.

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

Baſes cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt inter ſe, ut quadrata altitudinum; & viciſſim quadrata altitudinum, ut baſes.

81. Conſtat enim, quadrata altitudinum eſſe inter ſe in ratione ipſarum *duplicata* (a).

THEOREMA XV.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt directe inter ſe in ratione duplicata diametrorum ſuarum baſium.

I.

82. Sint duo cylindri ſimiles AD, *ad*. Dico, totam cylindri AD ſuperficiem eſſe ad totam ſuperficiem cylindri *ad* Fig. 11. in ratione *duplicata* diametrorum CD, *cd* ſuarum baſium. Fig. 12. Tab. 10.

Demonſtratio.

Eſto EMNF unum ex illis parallelogrammis infinitæ parvæ latitudinis, quibus cylindrica ſuperficies ACDB terminatur (b), & *emnf* ſit unum ex illis itidem parallelogrammis, quibus cylindrica ſuperficies *acdb* comprehenditur. Quoniam igitur duo cylindri ſunt per hypotheſim ſibi mutuo ſimiles, omniſque cylindrus ſit priſma infinitorum laterum (c), duo cylindri AD, *ad* ſpectari poſſunt veluti duo priſmata ſimilia, totidem idcirco ſimilibus planis comprehenſa (d). Duo ergo ex his parallelogrammis ſimilibus ſint EFMN, *efmn*. Cum igitur hæc ſint in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum MN, *mn* (e), & duo latera MN, *mn* ſint inter ſe,

(a) Lib. IX. §. 172.
(b) Lib. XI. §. 71.
(c) Ibidem §. 70.
(d) §. 1.
(e) Lib. IX. §. 170.

Digitized by Google

ſe, ut diametri CD, *cd* (a); cum ſint arcus ſimiles, licet infinite parvi, peripheriarum CMD, *cmd*, duo plana EFMN, *efmn* erunt in ratione *duplicata* diametrorum CD, *cd*. Hæc porro plana EFMN, *efmn* ſunt partes aliquotæ ſimiles cylindricarum ſuperficierum ACDB, *acdb* per hypotheſim. Ergo cylindrica quoque ſuperficies ACDB erit ad cylindricam ſuperficiem *acdb* in ratione *duplicata* diametri CD ad diametrum *cd* (b).

II.

Fig. 13. Fig. 14 Tab. 10. 83. Sint duo ſimiles coni BAE, *bae*. Dico, conicas hujuſmodi ſuperficies eſſe directe inter ſe in ratione *duplicata* diametrorum BE, *be* ſuarum baſium.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum præcedenti. Ut enim ſimilium cylindrorum ſuperficies ex ſimilibus parallelogrammis, ita ſimilium conorum ſuperficies ex totidem ſimilibus triangulis conſurgunt (c). Erit ergo conica ſuperficies BAE ad conicam ſuperficiem *bae*, ut triangulum infinite parvum CAD ad triangulum ſibi ſimile *cad* (d). Sunt autem hujuſmodi triangula in ratione duplicata laterum homologorum, ſive arcuum ſimilium CD, *cd* (e); proinde diametrorum BE, *be* (f). Ergo in eadem quoque ratione erunt conicę ipſæ ſuperficies BAE, *bae* (g). Superficies itaque cylindrorum &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

84. Si cylindricę ſuperficies ſumantur una cum circulis, quibus ipſi cylindri terminantur, & ſuperficies conicæ una cum baſium circulis itidem ſpectentur, ipſa adhuc tota aſſertio

(a) Ibidem §. 156.
(b) Lib. I. §. 127.
(c) Lib. XI. §. 73.
(d) Lib. I. §. 187.
(e) Lib. IX. §. 166.
(f) Ibidem §. 156.
(g) Lib. I. §. 77.

ſertio manifeſta eſt. Sunt enim circuli in ratione ſuarum diametrorum *duplicata* (a).

COROLLARIUM I.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt reſpective inter ſe, ut quadrata diametrorum ſuarum baſium.

85. Hujuſmodi enim quadrata ſunt, quemadmodum ipſę cylindricæ, & conicæ ſuperficies, in ratione ipſarum diametrorum *duplicata* (b).

COROLLARIUM II.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt in ratione duplicata tum axium, tum altitudinum.

86. Axes namque, & altitudines cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt directe inter ſe, ut diametri baſium (c).

COROLLARIUM III.

Similium cylindrorum, & conorum ſuperficies ſunt, ut quadrata axium, & altitudinum.

87. Sunt enim ejuſmodi quadrata in ratione ipſorum axium, & altitudinum *duplicata* (d).

COROLLARIUM IV.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt directe, ut circuli baſium, & viciſſim circuli baſium, ut ſuperficies.

88. Conſtat enim, circulos baſium eſſe inter ſe in ratione ſua-

(a) Lib. IX. §. 116.
(b) Lib. IX. §. 172.
(c) §. 8.
(d) Lib. IX. §. 172.

ſuarum diametrorum *duplicata* (a) quemadmodum horum ſolidorum ſuperficies.

COROLLARIUM V.

Si conus rectus ſecetur plano baſi parallelo, curva ſuperficies totius coni erit ad curvam ſuperficiem ſegmenti conici, ut circulus baſeos coni ad circulum ſectionis.

89. Ut ſi conus rectus *BAD* ſecetur plano MN baſi *BCD*
Fig. 7. parallelo, curva ſuperficies totius coni erit ad curvam ſuper-
Tab. 7. ficiem ſegmenti conici MAN, ut eſt circulus baſeos *BCD* totius coni ad circulum ſectionis MN. Etenim coni *BAD*, MAN ſunt ſibi mutuo ſimiles (b).

COROLLARIUM VI.

Si ratio diametrorum baſium, vel ratio axium, aut altitudinum in cylindris, & conis ſimilibus continuetur uſque ad tertium terminum, ſuperficies horum corporum reſpective erunt inter ſe, ut illorum primus ad tertium.

90. Ut ſi diameter *CD* baſis *CD* cylindri *AD* fuerit ad dia-
Fig. 5. Fig. 6. metrum *cd* baſis *cd* cylindri ſimilis *ad*, ut eſt quantitas x
Tab. 9. ad quantitatem y, & fiat $\div x \,.\, y \,.\, z$, ſuperficies cylindri AD erit ad ſuperficiem cylindri *ad*, ut eſt prima x ad tertiam z. Eſt enim x ad z in ratione *duplicata* primę x ad ſecundam y (c). Idipſum dicito de ratione axium, & altitudinum.

THEOREMA XVI.

Polyedra ſimilia in totidem ex æquo pyramides ſimiles reſolvi poſſunt.

91. Sint duo polyedra ſimilia *ACE*, *ace*. Dico, ea in totidem

(a) Lib. IX. §. 186. (c) Lib. I. §. 277.
(b) §. 26.

tidem ex æquo pyramides ſimiles reſolvi poſſe.

Demonſtratio.

Sumto in area polyedri *ACE* puncto M, ex eo veluti centro ducantur ad ſingulos ipſius polyedri angulos rectæ MB, MP, MA, MH &c. His diviſum erit polyedrum *ACE* in tot pyramides, punctum M pro vertice communi, & polyedri plana pro baſe habentes, ut patet de pyramidibus BMAP, AMFH, quot ſunt plana, quibus ipſum polyedrum terminatur. Concipiatur modo polyedrum *ACE* veluti conſurgens ex pluribus polyedricis ſuperficiebus, quæ omnes ſit concentricæ cum extima ſuperficie *ACE*, earumque plana ſint reſpective parallela planis ipſius ſuperficiei extimę *ACE*, prout exhibet ſuperficies *bdf* polyedro *ACE* incluſa. Cum igitur plana *bpa*, BPA ſint in pyramide BMAP inter ſe parallela, erunt ſibi mutuo ſimilia (a), eandemque ob cauſam ſimilia erunt etiam plana *ahf*, AHF, nec non plana *fne*, FNE, atque ita de ceteris. Quamobrem polyedrum ſuperficie *bdf* terminatum ſimile erit polyedro *ACE* (b). Eodem modo oſtendam, ea omnia polyedra, quæ ſuperficiebus ſoliditatem polyedri *ACE* conſtituentibus continentur, polyedro *ACE* eſſe ſimilia. Quoniam autem hujuſmodi polyedra polyedro *ACE* incluſa, eique ſimilia, eo continuo minora ſunt, quo ipſorum ſuperficies centro M ſit proximior, uni certe ex ipſis ęquale erit polyedrum *ace*, utpote quod minus eſt polyedro *ACE*, & illi ſimile. Ponamus ergo, polyedrum *ace* æquale eſſe polyedro *bdf*. Conſtat autem, polyedrum *bdf* conſtare ex tot pyramidibus, ex quot componitur polyedrum ACE, atque unius pyramides ſimiles eſſe pyramidibus alterius, alteram alteri, videlicet pyramidem *dMez* pyramidi DMEZ, pyramidem *eMfn* pyramidi EMFN, atque ita deinceps (c); cum plana *dze*, DZE ſint parallela, ſicuti etiam plana *enf*, ENF &c. Ergo polyedrum quoque

Fig. 15. Fig. 16. Tab. 10.

 ace

(a) Lib. XI. §. 18.
(b) §. 1.
(c) §. 25.

ace reſolvi poteſt in tot pyramides, in quot polyedrum ACE dividitur, & ea quidem ratione, ut pyramides polyedrum conſtituentes *ace* ſimiles ſint iis, quæ polyedrum ACE conſtituunt, altera alteri, quę nimirum ſuper ſimilia ipſorum polyedrorum plana ſunt conſtitutę. Itaque polyedra ſimilia &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

92. Erectis ſuper ſimilia plana DZE, *dae* ſimilibus pyramidibus DMEZ, *dmea*, ductiſque ex illarum apicibus M, *m* ad ſingulos ipſorum polyedrorum angulos rectis ME, *me* * MZ, *ma* &c. polyedra ipſa ſimilia in totidem ex æquo pyramides ſimiles diviſa erunt.

COROLLARIUM II.

Polyedra regularia ejusdem generis in totidem ex æquo pyramides ſimiles reſolvi poſſunt.

93. Omnia enim polyedra regularia ejusdem generis ſunt ſibi mutuo ſimilia (a).

LEMMA I.

Polyedrum quodcunque regulare reſolvi poteſt in tot pyramides omnino inter ſe æquales, quot ſunt illius plana.

94. Eſto polyedrum regulare ACE. Dico, ipſum reſolvi poſſe in tot pyramides omnino inter ſe æquales, quot ſunt plana, quibus terminatur.

Demonſtratio.

Ex illius centro M ad ſingulos ejusdem angulos ducantur radii

(a) §. 1.

radii MB, MP, MA, MH, MF &c. Quoniam igitur polyedrum eſt regulare, omnia plana BPA, AHF, &c., quibus clauditur, erunt regularia, ejusdem generis, & inter ſe æqualia (a); ac proinde æqualia inter ſe erunt omnia illorum latera BA, BP, PA, AF, AH, HF &c. (b). Sunt autem æquales inter ſe etiam radii MB, MP, MA, MH &c. (c). Ergo omnia triangula BMA, BMP, PMA, AMF, AMH &c., quibus pyramides BMAP, AMFH continentur, ſunt iſoſcelia (d), & inter ſe æqualia (e). Quamobrem pyramides ipſæ ſunt hujuſmodi, ut, una intra alteram poſita, ſibi mutuo perfecte congruant; atque adeo omnes ſunt inter ſe æquales (f). Hæ autem tot ſunt, quot ſunt plana polyedrum ipſum terminantia, ut patet. Ergo polyedrum ACE in tot reſolvi poteſt pyramides &c. quod erat oſtendendum. Fig. 16. Tab. 10.

COROLLARIUM I.

Anguli verticales æqualium pyramidum, in quas regulare polyedrum reſolvitur, ſunt omnes inter ſe æquales.

95. Cum enim anguli verticales BMP, BMA, PMA, AMF &c. iſoſcelium triangulorum, quibus verticales ipſarum pyramidum anguli continentur, ſint æquales (g), ob æqualitatem ſcilicet tum laterum, tum baſium ipſorum triangulorum, ipſique verticales pyramidum anguli totidem ex æquo planis angulis contineantur, perſpicuum eſt, eos omnes eſſe inter ſe æquales (h). Fig. 15. Tab. 10.

COROLLARIUM II.

Angulus verticalis ſingularum pyramidum æqualium, in quas polyedrum regulare reſolvitur, eſt ad quatuor ſolidos rectos angulos, ut baſis ipſius pyramidis ad totam polyedri ſuperficiem.

96. Angulus nempe verticalis BMA pyramidis BMAP in po-

(a) Lib. XI. §. 10.
(b) Lib. V. §. 20.
(c) §. 15.
(d) Lib. V. §. 25.
(e) Ibidem §. 24.
(f) Ibidem §. 34.
(g) Ibidem §. 32.
(h) Lib. XI. §. 4.

polyedro regulari ACE eſt ad quatuor ſolidos rectos angulos, qui circa centrum M fieri poſſunt, ut eſt baſis BPA ipſius
Fig. 15. Tab. 10. pyramidis ad totam polyedri ſuperficiem. Etenim, cum in tot pyramides æquales polyedrum ACE reſolvatur, quot ſunt plana ipſum terminantia, omneſque verticales ipſarum pyramidum anguli, qui ſpatium replent circa centrum M, quique propterea quatuor rectos angulos ſimul ſumti adæquant, ſint inter ſe æquales (a), ſicuti æqualia ſunt inter ſe mutuo omnia plana, quæ polyedricam ſuperficiem ACE conſtituunt (b), quæ pars aliquota totius polyedricæ ſuperficiei ACE eſt planum BPA, eadem pars aliquota quatuor rectorum erit angulus verticalis EMA pyramidis BMAP; ac proinde &c.

THEOREMA XVII.

Si ex centro polyedrorum regularium ejusdem generis ad ſingulos ipſorum angulos radii ducantur, in totidem ex æquo pyramides ſibi mutuo ſimiles polyedra ipſa diviſa erunt.

Fig. 15. Fig. 16. Tab. 10. 97. Sint duo polyedra ejusdem generis ACE, *ace*. Ex eorum centro M, *m* ducantur ad ſingulos ipſorum angulos radii MB, *mb*, MP, *mp* &c. Dico, omnes pyramides, in quas diviſum eſt polyedrum ACE, iis eſſe ſimiles, in quas diviſum eſt polyedrum *ace*, & ſimul numero eſſe æquales.

Demonſtratio.

Cum enim in utroque polyedro tot diſtinctæ ſint pyramides, quot ſunt plana terminantia, pyramides ipſæ in utroque erunt numero æquales. Quippe polyedra ipſa ſunt per hypotheſim ejusdem generis. Rurſus cum omnes pyramides, in quas diviſum eſt polyedrum ACE, ſint æquales inter ſe (c), ſicuti etiam omnes pyramides, in quas diviſum eſt polye-

(a) §. 95.
(b) Lib XI. §. 10.
(c) §. 94.

lyedrum *ace*, erit angulus verticalis DME pyramidis DMEZ ad quatuor rectos, ut planum DZE ad totam polyedri ACE ſuperficiem (a). Angulus quoque verticalis *dme* pyramidis *dmea* erit ad quatuor rectos, ut planum *dae* ad totam ſuperficiem polyedri *ace*. Eadem eſt autem ratio utriuſque plani DZE, *dae* ad totam ſui *reſpective* polyedri ſuperficiem; cum polyedra ipſa regularia ſint, & ejusdem generis. Ergo anguli quoque verticales DME, *dme* pyramidum DMEZ, *dmea* eandem ad quatuor rectos rationem habebunt; atque adeo erunt inter ſe æquales (b). Anguli autem ſolidi æquales planis angulis numero, & magnitudine æqualibus continentur (c). Ergo anguli plani DME, *dme* æquales erunt inter ſe, ſicuti etiam anguli plani DMZ, *dma*, nec non ZME, *ame*. Eſt autem latus DM ad latus ME in triangulo plano DME, ut in triangulo plano *dme* eſt latus *dm* ad latus *me*; cum ſit DM = ME, & *dm* = *me* (d). Ergo duo triangula DME, *dme* ſunt ſibi mutuo ſimilia (e). Eodem modo oſtendam, ſimilia eſſe ſibi mutuo tum duo triangula DMZ, *dma*, tum duo ZME, *ame*, eo vel maxime quod, ut ſuperiori loco demonſtravimus (f), omnia triangula, quibus continetur pyramis DMEZ, iſoſcelia ſint, & æqualia, ſicuti etiam omnia triangula, quibus pyramis *dmea* comprehenditur. Manifeſtum porro eſt, duo quoque plana DZE, *dae* eſſe ſibi mutuo ſimilia (g); cum ſint regularia, & ejusdem generis. Ergo duæ pyramides DMEZ, *dmea* planis numero æqualibus, & magnitudine ſimilibus terminantur; ac proinde ſunt ſibi mutuo ſimiles (h). Demonſtravimus autem, omnes pyramides, in quas dividitur polyedrum regulare ope rectarum, quæ ex illius centro ad ſingulos ejusdem angulos ducuntur, eſſe omnino inter ſe æquales (i). Ergo omnes pyramides, in quas diviſum eſt polyedrum regulare ACE ope radiorum MB, MP, MA &c., ſimiles ſunt iis omnibus, in quas polyedrum

(a) §. 96.
(b) Lib. I. §. 103.
(c) Lib. XI. §. 4.
(d) §. 15.
(e) Lib. IX. §. 69.
(f) §. 95.
(g) Lib. IX. §. 3.
(h) §. 1.
(i) §. 94.

lyedrum regulare ejuſdem generis *ace* eodem modo reſolvitur. Itaque ſi ex centro &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Radii polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt latera homologa pyramidum ſimilium, in quas polyedra ipſa ope ipſorum radiorum reſolvuntur.

98. Sic radii MD, *md* polyedrorum regularium ejuſdem generis ACE, *ace* ſunt latera homologa ſimilium pyramidum DMEZ, *dmea*, in quas polyedra ipſa ſuorum radiorum ope reſolvuntur. Ipſi namque radii ſunt latera homologa planorum ſimilium DME, *dme*, quibus ipſæ pyramides continentur.

Fig. 15. Fig. 16. Tab. 10.

THEOREMA XVIII.

Radii, & cateti polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt directe inter ſe, ut duo qualibet latera homologa planorum ſimilium, quibus polyedra ipſa terminantur.

Fig. 7. Fig. 8. Tab. 9. Sint duo polyedra regularia ejuſdem generis ACE, *ace*, quorum radii ſint rectæ ZA, *za*, cateti vero rectæ ZN, *zn*.

I.

99. Dico primo, radium ZA eſſe ad radium *za*, ut eſt latus AM plani AMF ad latus ſibi homologum *am* ſimilis plani *amf*.

Demonſtratio.

Radii ZA, *za* ſunt latera homologa planorum ſimilium AZM, *azm*, quibus ſimiles pyramides AZMF, *azmf* continentur (a). Latera autem homologa planorum ſimilium, quibus ſimilia ſolida, cujuſmodi ſunt duo polyedra ACE, *ace*

(a) §. 98.

ace (a), terminantur, eandem omnia inter ſe rationem habent (b). Ergo radii ZA, *za* ſunt *directe* inter ſe, ut duo homologa ipſorum polyedrorum latera AM, *am*.

II.

100. Dico 2, catetum ZN eſſe ad catetum *zn*, ut latus AM ad latus ſibi homologum *am*.

Demonſtratio

Cateti ZN, *zn* ſunt altitudines pyramidum ſimilium AZMF, *azmf* (c). Altitudines autem pyramidum ſunt directe inter ſe, ut duo quælibet homologa ipſarum latera (d). Ergo catetus ZN erit ad catetum *zn*, ut latus AM ad latus ſibi homologum *am*. Itaque radii, & cateti &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM

Cateti polyedrorum regularium ejusdem generis ſunt directe inter ſe, ut ipſorum radii.

101. Sunt enim tam cateti, quam radii horum polyedrorum, ut duo quælibet homologa eorundem latera.

THEOREMA XIX.

Superficies omnium ſolidorum ſimilium, quæ planis rectilineis continentur, ſunt inter ſe in ratione duplicata homologorum laterum duorum quorumcunque planorum ſimilium ipſa ſolida terminantium.

102. Sint duo ſolida ſimilia ACE, *ace* rectilineis planis terminata. Dico, ſuperficiem ſolidi ACE eſſe ad ſuperficiem ſo- Fig. 7. Fig. 8. Tab. 8.

(a) §. 3.
(b) §. 71.
(c) §. 20.
(d) §. 72.

ſolidi *ace* in ratione *duplicata* lateris AF plani rectilinei AMF ad latus ſibi homologum *af* ſimilis plani *amf*.

Demonſtratio.

Quoniam eadem eſt ratio omnium laterum homologorum planorum ſimilium, quibus ſolida ipſa ACE, *ace* continentur (a), & omnia plana ſimilia ſunt in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum (b), duo quęlibet plana ſimilia, quibus terminantur ſolida ACE, *ace*, erunt in ratione *duplicata* lateris AF ad latus *af*. Igitur ſumma omnium planorum terminantium ſolidum ACE erit ad ſummam omnium planorum, quibus ſolidum *ace* continetur, in ratione *duplicata* lateris AF ad latus *af* (c). Superficies autem ſolidi cujuſcunque non differt a ſumma planorum omnium, quibus ſolidum ipſum clauditur. Ergo ſuperficies ſolidi ACE, eſt ad ſuperficiem ſolidi ſibi ſimilis *ace* in ratione *duplicata* lateris AF ad latus *af*. Superficies itaque &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Superficies ſolidorum ſimilium, quæ planis rectilineis terminantur, ſunt directe inter ſe, ut duo quælibet ipſorum plana ſimilia.

103. Superficies nimirum ſolidi ACE erit ad ſuperficiem ſolidi ſimilis *ace*, ut planum AMF ad planum ſibi ſimile *amf*. Patet ex ipſa demonſtratione theorematis.

COROLLARIUM II.

Superficies priſmatum, & pyramidum ſimilium, quorum baſes ſint plana ſimilia, ſunt directe ſe, ut eorum baſes.

104. Sequitur ex pręcedenti.

CO-

(a) §. 71. (b) Lib. IX. §. 180. (c) Lib. I. §. 144.

COROLLARIUM III.

Superficies priſmatum, & pyramidum ſimilium, quarum baſes ſint plana ſimilia, ſunt in ratione duplicata altitudinum.

105. Sunt enim altitudines, ut duo quælibet latera homologa planorum terminantium (a).

COROLLARIUM IV.

Superficies polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt in ratione duplicata duorum laterum planorum ſimilium, quibus polyedra ipſa continentur.

106. Polyedra namque regularia ejuſdem generis ſunt ſimilia (b), & duo quælibet terminantium planorum latera ſunt homologa (c).

COROLLARIUM V.

Superficies polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt in ratione duplicata ſuorum radiorum, & cæterorum.

107. Sunt enim tam radii, quam cæteri polyedrorum regularium ejuſdem generis, ut duo quælibet homologa latera planorum terminantium (d).

(a) §. 72., 73.
(b) §. 3.
(c) §. 5.
(d) §. 99. 100.

Digitized by Google

ſolidi *ace* in ratione *duplicata* lateris AF plani rectilinei AMF ad latus ſibi homologum *af* ſimilis plani *amf*.

Demonſtratio.

Quoniam eadem eſt ratio omnium laterum homologorum planorum ſimilium, quibus ſolida ipſa ACE, *ace* continentur(a), & omnia plana ſimilia ſunt in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum(b), duo quęlibet plana ſimilia, quibus terminantur ſolida ACE, *ace*, erunt in ratione *duplicata* lateris AF ad latus *af*. Igitur ſumma omnium planorum terminantium ſolidum ACE erit ad ſummam omnium planorum, quibus ſolidum *ace* continetur, in ratione *duplicata* lateris AF ad latus *af*(c). Superficies autem ſolidi cujuſcunque non differt a ſumma planorum omnium, quibus ſolidum ipſum clauditur. Ergo ſuperficies ſolidi ACE, eſt ad ſuperficiem ſolidi ſibi ſimilis *ace* in ratione *duplicata* lateris AF ad latus *af*. Superficies itaque &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Superficies ſolidorum ſimilium, quæ planis rectilineis terminantur, ſunt directe inter ſe, ut duo quælibet ipſorum plana ſimilia.

103. Superficies nimirum ſolidi ACE erit ad ſuperficiem ſolidi ſimilis *ace*, ut planum AMF ad planum ſibi ſimile *amf*. Patet ex ipſa demonſtratione theorematis.

COROLLARIUM II.

Superficies priſmatum, & pyramidum ſimilium, quorum baſes ſint plana ſimilia, ſunt directe ſe, ut eorum baſes.

104. Sequitur ex precedenti.

CO-

(a) §. 71. (b) Lib. IX. §. 180. (c) Lib. I. §. 144.

COROLLARIUM III.

Superficies priſmatum, & pyramidum ſimilium, quarum baſes ſint plana ſimilia, ſunt in ratione duplicata altitudinum.

105. Sunt enim altitudines, ut duo quælibet latera homologa planorum terminantium (a).

COROLLARIUM IV.

Superficies polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt in ratione duplicata duorum laterum planorum ſimilium, quibus polyedra ipſa continentur.

106. Polyedra namque regularia ejuſdem generis ſunt ſimilia (b), & duo quælibet terminantium planorum latera ſunt homologa (c).

COROLLARIUM V.

Superficies polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt in ratione duplicata ſuorum radiorum, & cæterorum.

107. Sunt enim tam radii, quam cæteti polyedrorum regularium ejuſdem generis, ut duo quælibet homologa latera planorum terminantium (d).

(a) §. 72., 73.
(b) §. 3.
(c) §. 5.
(d) §. 99. 100.

Digitized by Google

COROLLARIUM VI.

Superficies ſolidorum ſimilium, quę rectilineis planis continentur, ſunt inter ſe, ut quadrata laterum homologorum planorum ſimilium ipſa ſolida terminantium.

108. Quadrata namque illorum laterum ſunt in ratione eorundem *duplicata* (a).

COROLLARIUM VII.

Superficies priſmatum, & pyramidum ſimilium, quarum baſes ſint plana ſimilia, ſunt, ut quadrata altitudinum.

109. Oſtenditur, ut præcedens.

COROLLARIUM VIII.

Superficies polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt, ut quadrata ſuorum radiorum, & cæterorum.

110. Eodem oſtenditur principio, quo *coroll.* VI. demonſtravimus.

COROLLARIUM IX.

Si ratio duorum laterum homologorum planorum ſimilium ſimilia ſolida terminantium continuetur uſque ad tertium terminum, ſuperficies ipſorum ſolidorum erunt inter ſe, ut illorum terminorum primus ad tertium.

111. Si nimirum in ſolidis ſimilibus ACE, *ace* latus AF plani AMF fuerit ad latus ſibi homologum *af* ſimilis plani

(a) Lib. IX. §. 172.

ni *amf*, ut quantitas x ad quantitatem y, ſi ponatur $\div\ x.\ y.\ z$, ſuperficies ſolidi ACE erit ad ſuperficiem ſolidi *ace*, ut primus illorum trium terminorum ad tertium, videlicet ut x ad z. Conſtat enim, terminum x eſſe ad z in ratione *duplicata* ipſius x ad ſecundum y (a).

COROLLARIUM X.

Si ratio altitudinum priſmatum, & pyramidum ſimilium, quorum baſes ſint plana ſimilia, continuetur uſque ad tertium terminum, horum ſolidorum ſuperficies erunt reſpectivè inter ſe, ut primus ad tertium.

112. Demonſtratur, ut præcedens.

COROLLARIUM XI.

Si ratio tam radiorum, quam catetorum in polyedris regularibus ejuſdem generis continuetur uſque ad tertium terminum, ſuperficies ipſorum polyedrorum erunt directè inter ſe, ut primus ad tertium.

113. Patet ex demonſtratione *coroll.* IX.

COROLLARIUM XII.

Duo quælibet latera homologa planorum ſimilium, quibus ſimilia ſolida continentur, ſunt in ratione ſubduplicata ſuperficierum ipſorum ſolidorum.

114. Quandoquidem cum ſuperficies hujuſmodi ſint in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum (b), ipſa viciſſim latera erunt in ratione ipſarum ſuperficierum *ſubduplicata* (c).

CO-

(a) Lib. I §. 177.
(b) §. 102.
(c) Lib. I. §. 59.

COROLLARIUM XIII.

Altitudines priſmatum, & pyramidum ſimilium, quarum baſes ſint plana ſimilia, ſunt in ratione ſuperficierum earundem ſubduplicata.

115. Evincitur eodem modo, quo præcedens.

COROLLARIUM XIV.

Duo qualibet latera planorum, quibus polyedra regularia ejuſdem generis terminantur, ſicuti etiam ipſorum radii, & cateti ſunt in ratione ſubduplicata ſuperficierum ipſorum polyedrorum.

116. Hujus demonſtratio eadem eſt cum demonſtratione *coroll.* XII.

LEMMA II.

Sphæra eſt polyedrum regulare infinitis planis magnitudinis infinitæ parvæ comprehenſum.

117. Perſpicuum namque eſt, polyedrum regulare magis ac magis ad ſphæram accedere, quo numero plura, & magnitudine exiliora ſunt plana, quibus polyedrum terminatur, ut proinde ſi hujuſmodi plana terminantia ſint numero infinita, & infinite exigua, polyedrum ipſum a ſphæra diſcerni minime poſſit. Ergo ſphæra ſpectari ac ſummi poteſt veluti polyedrum regulare planis numero infinitis, & magnitudine infinite parvis comprehenſum.

CO-

COROLLARIUM I.

Sphæræ catetus non differt ab illius radio.

118. Etenim recta, quę intelligitur cadere a centro ſphęræ in unum ex illis planis infinite parvis, quibus ſphæra terminatur, eique ad perpendiculum incumbere, non differt a ſphæræ radio, niſi quantitate, quæ omni aſſignabili minor eſt, ſcilicet quantitate infinite parva, atque adeo nulla (a). Ergo ſphæræ catetus non differt ab illius radio.

COROLLARIUM II.

Omnes ſphærę ſunt polyedra regularia ejuſdem generis.

119. Idem namque eſt numerus planorum regularium, quibus omnes ſphæræ continentur.

COROLLARIUM III.

Sphæræ ſunt polyedra ſibi mutuo ſimilia.

120. Omnia ſiquidem polyedra regularia ejuſdem generis ſunt ſibi mutuo ſimilia (b).

COROLLARIUM IV.

Omnes ſphæræ ſunt ſibi mutuo ſimiles.

121. Sequitur manifeſte ex præcedenti.

THEO-

(a) Lib. II. §. 52.
(b) §. 3.

THEOREMA XX.

Sphærarum ſuperficies ſunt inter ſe in ratione duplicata ſuorum radiorum.

Fig. 17. Fig. 18. Tab. 10. 122. Sint duæ ſphæræ ABCD, *abcd*, quarum radii ſint rectæ ED, *ed*. Dico, ſuperficiem ſphæræ ABCD eſſe ad ſuperficiem ſphæræ *abcd* in ratione *duplicata* radii ED ad radium *ed*.

Demonſtratio I.

Sphæræ ABCD, *abcd* ſunt polyedra regularia ejuſdem generis (a). Superficies autem polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt inter ſe in ratione *duplicata* ſuorum radiorum (b). Ergo ſuperficies quoque ſphærarum ABCD, *abcd* ſunt in ratione ſuorum radiorum ED, *ed duplicata*.

Demonſtratio II.

Cum enim ſphæræ ſuperficies conſurgat ex completa revolutione ſemiperipheriæ circularis circa quieſcentem diametrum (c), quam metitur integra peripheria circuli in ipſa ſphæra maximi (d) ſuperficies ſphæræ ABCD erit ad ſuperficiem ſphæræ *abcd* in ratione compoſita ex ratione ſemiperipheriæ ABC ad ſemiperipheriam *abc*, ex quibus circa quieſcentes diametros AC, *ac* rotantibus producuntur, & ex ratione integræ peripheriæ circuli maximi ABCD ad integram peripheriam circuli maximi *abcd* (e). Eſt autem tam ſemiperipheria ABC ad ſemiperipheriam *abc* (f), quam integra peripheria ABCD ad integram peripheriam *abcd*, ut radius ED ad radium *ed* (g). Ergo ſuperficies ſphæræ ABCD erit ad ſuperficiem ſphæræ *abcd* in ratione, quæ conſurgit ex

(a) §. 119.
(b) § 107.
(c) Lib. XI. §. 49.
(d) Ibidem §. 50.
(e) Lib. I. §. 169.
(f) Lib. IX. §. 150.
(g) Ibidem §. 154.

ex ratione radii ED ad radium *ed* ſemel ducta in ſeipſam. Hæc autem eſt ratio ipſorum radiorum *duplicata* (a). Ergo ſuperficies ſphæræ ABCD eſt ad ſuperficiem ſphæræ *abcd* in ratione *duplicata* radii ED ad radium *ed*. Itaque ſphærarum &c. quod erat oſtendendum,

COROLLARIUM I.

Sphara elementa decreſcunt centrum verſus in ratione duplicata imminuti radii.

123. Sphæricæ namque ſuperficies, quæ ſphæræ ſoliditatem conſtituunt (b), ſunt inter ſe in ratione *duplicata* radiorum, atque adeo in ratione *duplicata* imminuti radii centrum verſus ſuperficies ipſæ minuuntur.

COROLLARIUM II.

Elementa ſectoris ſpharici decreſcunt centrum verſus in ratione duplicata imminuti radii.

124. Elementa enim ſectoris ſphærici ſunt partes ſimiles ſuperficierum ſphæricarum, quæ ſphæræ ſoliditatem conſtituunt (c); ac proinde ſunt directe inter ſe, ut ipſæ ſphæricæ ſuperficies (d).

COROLLARIUM III.

Sphærarum ſuperficies ſunt in ratione ſuarum diametrorum duplicata.

125. Ratio namque diametrorum a ratione radiorum diverſa non eſt (e).

(a) Lib. I. §. 55.
(b) Lib XI. §. 48.
(c) Lib. XI. § 64.
(d) Lib. I. §. 126.
(e) Ibidem §. 127.

lyedrum regulare ejuſdem generis *ace* eodem modo reſolvitur. Itaque ſi ex centro &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Radii polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt latera homologa pyramidum ſimilium, in quas polyedra ipſa ope ipſorum radiorum reſolvuntur.

98. Sic radii MD, *md* polyedrorum regularium ejuſdem
Fig. 15. generis ACE, *ace* ſunt latera homologa ſimilium pyrami-
Fig. 16. Tab. 10. dum DMEZ, *dmea*, in quas polyedra ipſa ſuorum radiorum ope reſolvuntur. Ipſi namque radii ſunt latera homologa planorum ſimilium DME, *dme*, quibus ipſæ pyramides continentur.

THEOREMA XVIII.

Radii, & cateti polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt directe inter ſe, ut duo qualibet latera homologa planorum ſimilium, quibus polyedra ipſa terminantur.

Fig. 7. Fig. 8. Sint duo polyedra regularia ejuſdem generis ACE, *ace*,
Tab. 9. quorum radii ſint rectæ ZA, *za*, cateti vero rectæ ZN, *zn*.

I.

99. Dico primo, radium ZA eſſe ad radium *za*, ut eſt latus AM plani AMF ad latus ſibi homologum *am* ſimilis plani *amf*.

Demonſtratio.

Radii ZA, *za* ſunt latera homologa planorum ſimilium AZM, *azm*, quibus ſimiles pyramides AZMF, *azmf* continentur (a). Latera autem homologa planorum ſimilium, quibus ſimilia ſolida, cujuſmodi ſunt duo polyedra ACE,

ace

(a) §. 98.

Digitized by Google

ace (a), terminantur, eandem omnia inter ſe rationem habent (b). Ergo radii ZA, *za* ſunt *directe* inter ſe, ut duo homologa ipſorum polyedrorum latera AM, *am*.

II.

100. Dico 2, catetum ZN eſſe ad catetum *zn*, ut latus AM ad latus ſibi homologum *am*.

Demonſtratio

Cateti ZN, *zn* ſunt altitudines pyramidum ſimilium AZMF, *azmf* (c). Altitudines autem pyramidum ſunt directe inter ſe, ut duo quælibet homologa ipſarum latera (d). Ergo catetus ZN erit ad catetum *zn*, ut latus AM ad latus ſibi homologum *am*. Itaque radii, & cateti &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM

Cateti polyedrorum regularium ejusdem generis ſunt directe inter ſe, ut ipſorum radii.

101. Sunt enim tam cateti, quam radii horum polyedrorum, ut duo quælibet homologa eorundem latera.

THEOREMA XIX.

Superficies omnium ſolidorum ſimilium, quæ planis rectilineis continentur, ſunt inter ſe in ratione duplicata homologorum laterum duorum quorumcunque planorum ſimilium ipſa ſolida terminantium.

102. Sint duo ſolida ſimilia ACE, *ace* rectilineis planis Fig. 7. Fig. 8.
terminata. Dico, ſuperficiem ſolidi ACE eſſe ad ſuperficiem Tab. 3.

(a) §. 3.
(b) §. 71.
(c) §. 20.
(d) §. 72.

ſolidi *ace* in ratione *duplicata* lateris AF plani rectilinei AMF ad latus ſibi homologum *af* ſimilis plani *amf*.

Demonſtratio.

Quoniam eadem eſt ratio omnium laterum homologorum planorum ſimilium, quibus ſolida ipſa AC*E*, *ace* continentur (a), & omnia plana ſimilia ſunt in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum (b), duo quælibet plana ſimilia, quibus terminantur ſolida AC*E*, *ace*, erunt in ratione *duplicata* lateris AF ad latus *af*. Igitur ſumma omnium planorum terminantium ſolidum AC*E* erit ad ſummam omnium planorum, quibus ſolidum *ace* continetur, in ratione *duplicata* lateris AF ad latus *af* (c). Superficies autem ſolidi cujuſcunque non differt a ſumma planorum omnium, quibus ſolidum ipſum clauditur. Ergo ſuperficies ſolidi ACE, eſt ad ſuperficiem ſolidi ſibi ſimilis *ace* in ratione *duplicata* lateris AF ad latus *af*. Superficies itaque &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Superficies ſolidorum ſimilium, quæ planis rectilineis terminantur, ſunt directe inter ſe, ut duo quælibet ipſorum plana ſimilia.

103. Superficies nimirum ſolidi AC*E* erit ad ſuperficiem ſolidi ſimilis *ace*, ut planum AMF ad planum ſibi ſimile *amf*. Patet ex ipſa demonſtratione theorematis.

COROLLARIUM II.

Superficies priſmatum, & pyramidum ſimilium, quorum baſes ſint plana ſimilia, ſunt directe ſe, ut eorum baſes.

104. Sequitur ex præcedenti.

CO-

(a) §. 71. (b) Lib. IX. §. 180. (c) Lib. I. §. 144.

COROLLARIUM III.

Superficies priſmatum, & pyramidum ſimilium, quarum baſes ſint plana ſimilia, ſunt in ratione duplicata altitudinum.

105. Sunt enim altitudines, ut duo quælibet latera homologa planorum terminantium (a).

COROLLARIUM IV.

Superficies polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt in ratione duplicata duorum laterum planorum ſimilium, quibus polyedra ipſa continentur.

106. Polyedra namque regularia ejuſdem generis ſunt ſimilia (b), & duo quælibet terminantium planorum latera ſunt homologa (c).

COROLLARIUM V.

Superficies polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt in ratione duplicata ſuorum radiorum, & cæterorum.

107. Sunt enim tam radii, quam cæteti polyedrorum regularium ejuſdem generis, ut duo quælibet homologa latera planorum terminantium (d).

(a) §. 72., 73.
(b) §. 3.
(c) §. 5.
(d) §. 99. 100.

COROLLARIUM VI.

Superficies ſolidorum ſimilium, quę rectilineis planis continentur, ſunt inter ſe, ut quadrata laterum homologorum planorum ſimilium ipſa ſolida terminantium.

108. Quadrata namque illorum laterum ſunt in ratione eorundem *duplicata* (a).

COROLLARIUM VII.

Superficies priſmatum, & pyramidum ſimilium, quarum baſes ſint plana ſimilia, ſunt, ut quadrata altitudinum.

109. Oſtenditur, ut præcedens.

COROLLARIUM VIII.

Superficies polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt, ut quadrata ſuorum radiorum, & cæterorum.

110. Eodem oſtenditur principio, quo *coroll.* VI. demonſtravimus.

COROLLARIUM IX.

Si ratio duorum laterum homologorum planorum ſimilium ſimilia ſolida terminantium continuetur uſque ad tertium terminum, ſuperficies ipſorum ſolidorum erunt inter ſe, ut illorum terminorum primus ad tertium.

111. Si nimirum in ſolidis ſimilibus ACE, *ace* latus AF plani AMF fuerit ad latus ſibi homologum *af* ſimilis plani

(a) Lib. IX. §. 172.

ni *amf*, ut quantitas x ad quantitatem y, ſi ponatur $\div x . y . z$, ſuperficies ſolidi ACE erit ad ſuperficiem ſolidi *ace*, ut primus illorum trium terminorum ad tertium, videlicet ut x ad z. Conſtat enim, terminum x eſſe ad z in ratione *duplicata* ipſius x ad ſecundum y (a).

COROLLARIUM X.

Si ratio altitudinum priſmatum, & pyramidum ſimilium, quorum baſes ſint plana ſimilia, continuetur uſque ad tertium terminum, horum ſolidorum ſuperficies erunt reſpective inter ſe, ut primus ad tertium.

112. Demonſtratur, ut præcedens.

COROLLARIUM XI.

Si ratio tam radiorum, quam cæterorum in polyedris regularibus ejuſdem generis continuetur uſque ad tertium terminum, ſuperficies ipſorum polyedrorum erunt directe inter ſe, ut primus ad tertium.

113. Patet ex demonſtratione *coroll.* IX.

COROLLARIUM XII.

Duo quælibet latera homologa planorum ſimilium, quibus ſimilia ſolida continentur, ſunt in ratione ſubduplicata ſuperficierum ipſorum ſolidorum.

114. Quandoquidem cum ſuperficies hujuſmodi ſint in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum (b), ipſa viciſſim latera erunt in ratione ipſarum ſuperficierum *ſubduplicata* (c).

CO-

(a) Lib. I §. 177.
(b) §. 102.
(c) Lib. I. §. 39.

COROLLARIUM XIII.

Altitudines priſmatum, & pyramidum ſimilium, quarum baſes ſint plana ſimilia, ſunt in ratione ſuperficierum earundem ſubduplicata.

115. Evincitur eodem modo, quo præcedens.

COROLLARIUM XIV.

Duo qualibet latera planorum, quibus polyedra regularia ejuſdem generis terminantur, ſicuti etiam ipſorum radii, & cateti ſunt in ratione ſubduplicata ſuperficierum ipſorum polyedrorum.

116. Hujus demonſtratio eadem eſt cum demonſtratione *coroll.* XII.

LEMMA II.

Sphæra eſt polyedrum regulare infinitis planis magnitudinis infinitæ parvæ comprehenſum.

117. Perſpicuum namque eſt, polyedrum regulare magis ac magis ad ſphæram accedere, quo numero plura, & magnitudine exiliora ſunt plana, quibus polyedrum terminatur, ut proinde ſi hujuſmodi plana terminantia ſint numero infinita, & infinite exigua, polyedrum ipſum a ſphæra diſcerni minime poſſit. Ergo ſphæra ſpectari ac ſummi poteſt veluti polyedrum regulare planis numero infinitis, & magnitudine infinite parvis comprehenſum.

COROLLARIUM I.

Sphæræ catetus non differt ab illius radio.

118. Etenim recta, quę intelligitur cadere a centro ſphęræ in unum ex illis planis infinite parvis, quibus ſphæra terminatur, eique ad perpendiculum incumbere, non differt a ſphæræ radio, niſi quantitate, quæ omni aſſignabili minor eſt, ſcilicet quantitate infinite parva, atque adeo nulla (a). Ergo ſphæræ catetus non differt ab illius radio.

COROLLARIUM II.

Omnes ſphærę ſunt polyedra regularia ejuſdem generis.

119. Idem namque eſt numerus planorum regularium, quibus omnes ſphæræ continentur.

COROLLARIUM III.

Sphæræ ſunt polyedra ſibi mutuo ſimilia.

120. Omnia ſiquidem polyedra regularia ejuſdem generis ſunt ſibi mutuo ſimilia (b).

COROLLARIUM IV.

Omnes ſphæræ ſunt ſibi mutuo ſimiles.

121. Sequitur manifeſte ex præcedenti.

THEO-

(a) Lib. II. §. 52.
(b) §. 3.

Digitized by Google

THEOREMA XX.

Sphærarum ſuperficies ſunt inter ſe in ratione duplicata ſuorum radiorum.

Fig. 17. Fig. 18. Tab. 10. 122. Sint duæ ſphæræ ABCD, *abcd*, quarum radii ſint rectæ ED, *ed*. Dico, ſuperficiem ſphæræ ABCD eſſe ad ſuperficiem ſphæræ *abcd* in ratione *duplicata* radii ED ad radium *ed*.

Demonſtratio I.

Sphæræ ABCD, *abcd* ſunt polyedra regularia ejuſdem generis (a). Superficies autem polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt inter ſe in ratione *duplicata* ſuorum radiorum (b). Ergo ſuperficies quoque ſphærarum ABCD, *abcd* ſunt in ratione ſuorum radiorum ED, *ed duplicata*.

Demonſtratio II.

Cum enim ſphæræ ſuperficies conſurgat ex completa revolutione ſemiperipheriæ circularis circa quieſcentem diametrum (c), quam metitur integra peripheria circuli in ipſa ſphæra maximi (d) ſuperficies ſphæræ ABCD erit ad ſuperficiem ſphæræ *abcd* in ratione compoſita ex ratione ſemiperipheriæ ABC ad ſemiperipheriam *abc*, ex quibus circa quieſcentes diametros AC, *ac* rotantibus producuntur, & ex ratione integræ peripheriæ circuli maximi ABCD ad integram peripheriam circuli maximi *abcd* (e). Eſt autem tam ſemiperipheria ABC ad ſemiperipheriam *abc* (f), quam integra peripheria ABCD ad integram peripheriam *abcd*, ut radius ED ad radium *ed* (g). Ergo ſuperficies ſphæræ ABCD erit ad ſuperficiem ſphæræ *abcd* in ratione, quæ conſurgit ex

(a) §. 119.
(b) § 107.
(c) Lib. XI. §. 49.
(d) Ibidem §. 50.
(e) Lib. I. §. 169.
(f) Lib. IX. §. 150.
(g) Ibidem §. 154.

ex ratione radii ED ad radium *ed* ſemel ducta in ſeipſam: Hæc autem eſt ratio ipſorum radiorum *duplicata* (a). Ergo ſuperficies ſphæræ ABCD eſt ad ſuperficiem ſphæræ *abcd* in ratione *duplicata* radii ED ad radium *ed*. Itaque ſphærarum &c. quod erat oſtendendum,

COROLLARIUM I.

Sphæra elementa decreſcunt centrum verſus in ratione duplicata imminuti radii.

123. Sphæricæ namque ſuperficies, quæ ſphæræ ſoliditatem conſtituunt (b), ſunt inter ſe in ratione *duplicata* radiorum, atque adeo in ratione *duplicata* imminuti radii centrum verſus ſuperficies ipſæ minuuntur.

COROLLARIUM II.

Elementa ſectoris ſphærici decreſcunt centrum verſus in ratione duplicata imminuti radii.

124. Elementa enim ſectoris ſphærici ſunt partes ſimiles ſuperficierum ſphæricarum, quæ ſphæræ ſoliditatem conſtituunt (c); ac proinde ſunt directe inter ſe, ut ipſæ ſphæricæ ſuperficies (d).

COROLLARIUM III.

Sphærarum ſuperficies ſunt in ratione ſuarum diametrorum duplicata.

125. Ratio namque diametrorum a ratione radiorum diverſa non eſt (e).

(a) Lib. I. §. 55.
(b) Lib. XI. §. 48.
(c) Lib. XI. § 64.
(d) Lib. I. §. 126.
(e) Ibidem §. 127.

COROLLARIUM IV.

Superficies ſphærarum ſunt inter ſe, ut quadrata ſuarum diametrorum, & ſemidiametrorum.

126. Nimirum ſuperficies ſphæræ ABCD eſt ad ſuperficiem ſphæræ *abcd*, ut quadratum AF diametri AC ad quadratum *af* diametri *ac*, ſicuti etiam ut quadratum EG radii EC ad quadratum *eg* radii *ec*. Sunt enim hujuſmodi quadrata in ratione ſuorum laterum *duplicata* (a).

Fig. 17. Fig. 18. Tab. 10.

COROLLARIUM V.

Superficies ſphærarum ſunt directe inter ſe, ut maximi ipſarum ſphærarum circuli.

127. Ut ſi maximus circulus ſphæræ ABCD ſit MNPQ, & maximus circulus ſphæræ *abcd* ſit *mnpq*, ſuperficies ſphæræ ABCD erit ad ſuperficiem ſphæræ *abcd*, ut circulus MNPQ ad circulum *mnpq*. Etenim diametri MP, *mp* circulorum MNPQ, *mnpq* diverſæ non ſunt a diametris ipſarum ſphærarum ABCD, *abcd* (b). Sunt autem circuli, ut quadrata ſuarum diametrorum (c). Ergo circuli MNPQ, *mnpq* ſunt quoque, ut quadrata diametrorum AC, *ac* ſphærarum ABCD, *abcd*. Superficies autem ſphærarum ABCD, *abcd* ſunt, ut quadrata diametrorum AC, *ac* (d). Ergo erunt etiam, ut quadrata diametrorum MP, *mp*, atque adeo ut maximi ipſarum circuli MNPQ, *mnpq*.

Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19. Fig. 20. Tab. 10.

CO-

(a) Lib. IX. §. 172
(b) Lib. XII. §. 49.
(c) Lib. IX. §. 166.
(d) §. 126.

COROLLARIUM VI.

Si ratio diametrorum, vel ſemidiametrorum duarum ſphærarum continuetur uſque ad tertium terminum, ſuperficies unius ſphæræ erit ad ſuperficiem alterius, ut illorum primus ad tertium.

128. Primus enim illorum terminorum eſt ad tertium in *duplicata* ratione primi ad ſecundum (a).

COROLLARIUM VII.

Tam diametri, quam ſemidiametri ſphærarum ſunt in ratione ſubduplicata ſuperficierum earundem.

129. Id enim ex eo aperte ſequitur, quod ex ratione tam diametrorum, quam ſemidiametrorum ſemel in ſe ducta ratio ipſarum ſuperficierum conſurgat (b).

THEOREMA XXI.

Priſmata, & pyramides ſimiles ſunt reſpective inter ſe in ratione triplicata laterum homologorum duorum planorum ſimilium, quibus continentur.

I.

130. Sint duo priſmata ſimilia AE, *ae*, quorum homologa latera ſint EF, *ef*. Dico, priſma AE eſſe ad priſma *ae* in ratione *triplicata* lateris EF ad latus *ef*. Fig. 2. Fig. 4. Tab. 9.

Demonſtratio.

Duo ſimilia plana DEF, *def* ſpectentur veluti baſes ipſorum

(a) Lib. I. §. 277. (b) Ibidem §. 19.

rum priſmatum, eorumque altitudines ſint rectæ MN, *mn*: cum igitur priſmata ſint inter ſe in ratione compoſita baſium, & altitudinum (a), priſma AE erit ad priſma *ae* in ratione compoſita baſis DEF ad baſim *def*, & ex ratione altitudinis MN ad altitudinem *mn*. Sunt autem baſes DEF, *def* in ratione *duplicata* laterum homologorum EF, *ef* (b); eademque eſt ratio altitudinum MN, *mn*, quæ laterum EF, *ef* (c). Ergo priſma AE erit ad priſma *ae* in ratione compoſita ex ratione laterum EF, *ef* & ex eadem *duplicata*. Hæc autem eſt ratio *triplicata* ipſorum laterum EF, *ef* (d). Ergo priſmata AE, *ae* ſunt in ratione laterum EF, *ef* *triplicata*.

I I.

131. Sint duæ pyramides ſimiles DMF, *dmf*, quarum baſium ſimilium DEF, *def* homologa latera ſint EF, *ef*. Dico, pyramidem DMF eſſe ad pyramidem *dmf* in ratione *triplicata* homologorum laterum EF, *ef*.

Euclid. l. 12. p. 8.

Demonſtratio I.

Coincidit cum præcedenti. Sunt enim pyramides, quemadmodum priſmata, in ratione compoſita baſium, & altitudinum (e).

Demonſtratio II.

Super easdem baſes DEF, *def*, & ſub iiſdem altitudinibus MN, *mn* conſtituta habeantur duo ſimilia priſmata AE, *ae*. Res perſpecta eſt, pyramidem DMF eſſe ad pyramidem *dmf*, ut priſma AE ad priſma *ae* (f). Eſt autem priſma AE ad priſma *ae* in ratione *triplicata* homologorum laterum EF, *ef* (g). Ergo in eadem quoque ratione erunt pyramides DMF, *dmf*.

(a) §. 53.
(b) Lib. IX. §. 121.
(c) §. 72.
(d) Lib. I. §. 55.
(e) §. 56.
(f) §. 53.
(g) §. 130.

dæf. Itaque priſmata &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Priſmata, & pyramides ſimiles, quarum baſes ſint plana ſimilia, ſunt reſpective inter ſe in ratione triplicata ſuarum altitudinum.

132. Sunt enim altitudines priſmatum, & pyramidum ſimilium, ut duo quælibet homologa ipſorum latera (a).

COROLLARIUM II.

Parallelepipeda ſimilia ſunt in ratione triplicata ſuorum laterum homologorum.

133. Similia namque parallelepipeda ſunt ſpecies priſmatum ſimilium; cum omne parallelepipedum ſit priſma (b).

COROLLARIUM III.

Cubi ſunt in ratione triplicata ſuorum laterum.

134. Omnes enim cubi ſunt parallelepipeda ſimilia, cum omnis cubus ſit parallelepipedum (c), & omnes cubi ſint ſibi mutuo ſimiles (d). Omniaque inſuper latera unius ſunt homologa lateribus alterius (e).

COROLLARIUM IV.

Omnia tetraedra ſunt in ratione ſuorum laterum triplicata.

135. Etenim omnia tetraedra ſunt pyramides, & quidem ſimi-

(a) §. 72., 73.
(b) Lib. XI §. 23.
(c) Ibidem §. 26.
(d) §. 4.
(e) §. 2.

ſimiles (a); atque omnia unius tetraedri latera ſunt alterius lateribus homologa (b).

COROLLARIUM V.

Omnia priſmata ſimilia a cubis diverſa, omneſque pyramides ſimiles ſunt, ut cubi ſuorum laterum homologorum.

136. Omnia namque hujuſmodi ſolida ſimilia ſunt *reſpective* inter ſe in ratione *triplicata* ſuorum laterum homologorum, in qua itidem ratione ſunt eorumdem laterum cubi (c).

COROLLARIUM VI.

Si ratio laterum homologorum in priſmatibus, parallelepipedis, & pyramidibus ſimilibus, atque cubis continuetur uſque ad quartum terminum, ſolidum erit ad ſolidum, ut illorum primus ad quartum.

137. Ut ſi latus EF priſmatis AE fuerit ad latus ſibi homologum *ef* ſimilis priſmatis *ae*, quemadmodum eſt *u* ad *x*,
Fig. 3. Fig. 4. Tab. 9.
& fiat $\div u \,.\, x \,.\, y \,.\, z$, ſolidum AE erit ad ſimile ſolidum *ae*, ut primus terminus *u* ad quartum *z*. Eſt enim *u* ad *z* in ratione *triplicata* primi *u* ad ſecundum *x* (d).

SCHOLION.

138. Hinc apparet, ex inventione *duarum mediarum proportionalium* inter duas datas rectas lineas dependere ſolutionem eximii problematis de *cubi duplicatione*, quod Priſcorum ingenia maxime torſit, quodque ab Apollinis Deliaci reſponſo *Deliacum* dictum eſt, quatenus nempe is conſulentibus reſpondit, tum demum Athenas peſte, quæ id temporis graſſabatur, liberatum iri, cum ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. THEO-

(a) §. 4.
(b) §. 5.
(c) §. 134.
(d) Lib. I. §. 177.

THEOREMA XXII.

Cylindri, & coni ſimiles ſunt reſpective inter ſe in ratione duplicata diametrorum ſuarum baſium.

I.

139. Sint duo ſimiles cylindri FD, *fd*. Dico, illos eſſe inter ſe in ratione *triplicata* diametrorum CD, *cd* ſuarum baſium. Euclid. l. 12 p. 12

Demonſtratio.

Cylindri FD, *fd* ſunt in ratione compoſita ex ratione baſium CD, *cd*, & ex ratione altitudinum OR, *or* (a). Circuli autem baſium ſunt in ratione *duplicata* diametrorum CD, *cd* (b), & ratio altitudinum OR, *or* diverſa non eſt a ratione diametrorum CD, *cd* (c). Ergo cylindri FD, *fd* erunt inter ſe in ratione compoſita ex ratione diametrorum CD, *cd*, & ex eadem *duplicata*. Hæc autem ratio eſt *triplicata* ipſarum diametrorum CD, *cd* (d). Ergo cylindri FD, *fd* ſunt in ratione diametrorum ſuarum baſium *triplicata*. Fig. 5. Fig. 6. Tab. 9.

I I.

140. Sint duo coni ſimiles COD *cod*. Dico, eosquoque eſſe inter ſe in ratione *triplicata* diametrorum CD, *cd* ſuarum baſium.

Demonſtratio I.

Eadem eſt cum præcedenti. Etenim coni, quemadmodum cylindri, ſunt in ratione compoſita baſium, & altitudinum (e), & ratio altitudinum in conis ſimilibus diverſa non eſt a ratione diametrorum ſuarum baſium (f).

Demon-

(a) §. 57.
(b) Lib. IX. §. 116.
(c) §. 77.
(d) Lib. I. §. 55.
(e) §. 58.
(f) §. 78.

Demonſtratio II.

Enimvero, ſi ſuper easdem baſes CD, *cd*, & ſub iisdem altitudinibus OR, *or* conſtituantur ſimiles cylindri FD, *fd*, coni COD, *cod* erunt inter ſe, ut ipſi cylindri FD, *fd* (a). Cylindri autem FD, *fd* ſunt in ratione *triplicata* diametrorum CD, *cd* ſuarum baſium (b). Ergo in eadem itidem ratione erunt coni COD, *cod*. Itaque cylindri &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Cylindri, & coni ſimiles ſunt reſpective inter ſe in ratione triplicata ſemidiametrorum ſuarum baſium.

141. Semidiametri namque circulorum ſunt inter ſe, ut eorundem diametri (c).

COROLLARIUM II.

Cylindri, & coni ſimiles ſunt reſpective inter ſe in ratione triplicata tum axium, tum altitudinum.

142. Etenim ratio tum axium, tum altitudinum in cylindris, & conis ſimilibus diverſa non eſt a ratione diametrorum ſuarum baſium (d).

COROLLARIUM III.

Cylindri, & coni ſimiles ſunt reſpective inter ſe, ut cubi altitudinum, axium, diametrorum, & ſemidiametrorum ſuarum baſium.

143. Sunt enim cubi in ratione *triplicata* ſuorum laterum (e). CO-

(a) §. 14.
(b) §. 139.
(c) Lib. I. §. 116.
(d) §. 8.
(e) §. 114.

COROLLARIUM IV.

Si ratio altitudinum, vel axium, aut diametrorum, vel ſemidiametrorum baſium in cylindris, & conis ſimilibus continuetur uſque ad quartum terminum, cylindrus erit ad cylindrum, & conus ad conum, ut illorum terminorum primus ad quartum.

144. Quandoquidem primus illorum terminorum eſt ad quartum in ratione *triplicata* primi ad ſecundum (a).

COROLLARIUM V.

Axes, & altitudines, ſicuti etiam diametri, & ſemidiametri baſium cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt reſpective inter ſe in ratione ſubtriplicata ipſorum corporum.

145. Sunt enim inter ſe in ea ratione, ex qua ducta in ſeipſam *duplicatam* ratio ipſorum corporum efficitur.

THEOREMA XXIII.

Polyedra ſimilia ſunt in ratione triplicata laterum homologorum duorum planorum ſimilium, quibus continentur.

146. Sint duo polyedra ſimilia ACE, *ace*, & AF, *af* ſint latera homologa planorum ſimilium AMF, *amf*. Dico, polyedrum ACE eſſe ad polyedrum *ace* in ratione *triplicata* laterum AF, *af*. Fig. 7. Fig. 8. Tab. 9.

(a) Lib. I. §. 177.

Demonſtratio.

Cum polyedra ACE, *ace* reſolvi poſſint in pyramides numero æquales, & magnitudine ſimiles (a), eademque ſit ratio omnium laterum homologorum planorum ſimilium, quibus polyedra ipſa terminantur (b), atque inſuper pyramides ſimiles ſint in ratione *triplicata* ſuorum laterum homologorum (c), quælibet pyramis illarum, in quas reſolvitur polyedrum ACE, erit ad quamlibet ſibi ſimilem illarum pyramidum, in quas polyedrum *ace* dividitur, in ratione *triplicata* laterum homologorum AF, *af*; atque adeo omnes ſimul pyramides conſtituentes polyedrum ACE erunt ad eas omnes pyramides, ſimul itidem ſumtas, quæ polyedrum *ace* conſtituunt, in ratione ipſorum laterum *AF*, *af triplicata*(d). Igitur polyedrum ACE erit ad polyedrum *ace* in ratione *triplicata* homologorum laterum AF, *af*. Polyedra itaque ſimilia &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Polyedra ſimilia ſunt directe inter ſe, ut cubi laterum homologorum duorum planorum ſimilium, quibus terminantur.

147. Sunt enim cubi illorum laterum in ratione eorundem triplicata (e).

COROLLARIUM II.

Polyedra regularia ejuſdem generis ſunt directe inter ſe in ratione triplicata laterum homologorum.

148. Omnia ſiquidem polyedra regularia ejuſdem generis ſunt

(a) §. 91.
(b) §. 72.
(c) §. 121.
(d) Lib. I. §. 144.
(e) §. 134.

ſunt ſibi mutuo ſimilia (a); atque adeo in ratione *triplicata* ſuorum laterum, utpote quæ omnia ſunt ſibi mutuo homologa (b).

COROLLARIUM III.

Polyedra regularia ejuſdem generis ſunt inter ſe in ratione triplicata ſuorum radiorum, & cæterorum.

149. Etenim radii, & cæteri polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt inter ſe, ut duo quælibet ipſorum latera (c). Hæc autem polyedra ſunt in ratione ſuorum laterum *triplicata* (d). Ergo erunt quoque in ratione *triplicata* ſuorum radiorum, & cæterorum.

COROLLARIUM IV.

Polyedra regularia ejuſdem generis ſunt inter ſe, ut cubi ſuorum laterum, nec non radiorum, & cæterorum,

150. Siquidem horum omnium cubi ſunt in ratione eorundem *triplicata* (e).

COROLLARIUM V.

Duo quælibet ſolida rectilinea ſimilia ſunt in ratione triplicata laterum homologorum duorum planorum ſimilium, quibus continentur.

151. In hac enim ratione demonſtravimus eſſe duo priſmata ſimilia (f), duas ſimiles pyramides (g), duoque ſimilia polyedra (h). Ad hæc autem omnia ſolida ſimilia rectilinea reducuntur. Ergo &c.

(a) §. 3.
(b) §. 5.
(c) §. 99. & 100.
(d) §. 148.
(e) §. 134.
(f) §. 130.
(g) §. 131.
(h) §. 146.

COROLLARIUM VI.

Si ratio duorum laterum homologorum planorum rectilineorum ſimilium, quibus ſimilia ſolida terminantur, continuetur uſque ad quartum terminum, ſolidum erit ad ſolidum, ut illorum primus ad quartum.

152. Eſt enim primus illorum quatuor terminorum ad quartum in ratione *triplicata* primi ad ſecundum (a).

COROLLARIUM VII.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint latera homologa ſolidorum ſimilium, ſolida ipſa erunt proportionalia.

153. Ut ſi quatuor rectæ proportionales *a*, *b*, *c*, *d* fuerint latera homologa ſolidorum ſimilium A, B, C, D, ſolida ipſa A, B, C, D erunt inter ſe proportionalia. Cum enim ſit per hypotheſim $a.b{=}c.d$, ſicuti ſolidum A eſt ad ſolidum B in ratione *triplicata* primæ *a* ſecundam *b* (b), erit ſolidum A ad ſolidum B in ratione *triplicata* etiam tertiæ *c* ad quartam *d*. Eſt autem ſolidum quoque C ad ſolidum D in ratione *triplicata* earundem *c*, *d*. Ergo erit $A.B{=}C.D$.

COROLLARIUM VIII.

Si in polyedris regularibus ejuſdem generis ratio radiorum, vel catetorum continuetur uſque ad quartum terminum, erit polyedrum ad polyedrum, ut primus illorum terminorum ad quartum.

154. Demonſtratio eadem eſt cum demonſtratione coroll. VI.

CO-

(a) Lib. I. §. 177.   (b) §. 151.

COROLLARIUM IX.

Latera homologa ſolidorum rectilineorum ſimilium ſunt in ratione ipſorum ſolidorum ſubtriplicata.

155. Ipſorum namque laterum ratio ea eſt, ex qua ducta in ſeipſam *duplicatam* ratio ipſorum ſolidorum efficitur.

COROLLARIUM X.

Radii, & cateti polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt in ratione ipſorum polyedrorum ſubtriplicata.

156. Coincidit cum præcedenti.

COROLLARIUM XI.

Si fuerint quatuor ſolida ſimilia inter ſe proportionalia, eorum latera homologa erunt proportionalia.

157. Ut ſi fuerint quatuor ſolida rectilinea proportionalia A, B, C, D, quorum latera homologa ſint *a*, *b*, *c*, *d*, erit *a*. *b*=*c*. *d*. Cum enim ſit A. B=C. D, quemadmodum latera *a*, *b* ſunt in ratione *ſubtriplicata* duorum ſolidorum A, B (b), erunt etiam in ratione *ſubtriplicata* duorum ſolidorum C, D (c). Sunt autem etiam duo *c*, *d* in ratione *ſubtriplicata* ſolidorum C, D. Ergo erit *a*. *b*=*c*. *d*. Euclid. l.12p.18

THEOREMA XXIV.

Sphæræ ſunt inter ſe in ratione triplicata ſuorum radiorum.

158. Sint duæ ſphæræ ABCD, *abcd*, quarum radii ſint rectæ

(a) §. 151. (b) §. 155. (c) §. 155.

rectæ ED, *ed*. Dico, ſphæram ABCD eſſe ad ſphæram *abcd* in ratione *triplicata* radii ED ad radium *ed*.

Demonſtratio I.

Fig. 17. Fig. 18. Tab. 10. Sphæræ conſiderari poſſunt veluti duo polyedra regularia ejuſdem generis (a). Hujuſmodi autem polyedra ſunt inter ſe in ratione *triplicata* ſuorum radiorum (b). Ergo in *triplicata* quoque ſuorum radiorum ED, *ed* ratione erunt ſphæræ ABCD, *abcd*.

Demonſtratio II.

Quoniam ſphæra ABCD oritur ex completa revolutione ſemicirculi ABC circa quieſcentem diametrum AC, quam metitur peripheria circuli in ipſa ſphæra maximi ABCD, & ſphæra *abcd* ex rotatione ſemicirculi *abc* circa diametrum quieſcentem *ac*, cujus rotationis menſura eſt peripheria circuli itidem maximi *abcd* (c), ſphæra ABCD erit ad ſphæram *abcd* in ratione compoſita ex ratione ſemicirculi ABC ad ſemicirculum *abc*, & ex ratione integræ peripheriæ circuli maximi ABCD ad peripheriam circuli maximi *abcd* (d). Semicirculus autem ABC eſt ad ſemicirculum *abc* in ratione *duplicata* radii ED ad radium *ed* (e), & peripheria circuli ABCD eſt ad peripheriam circuli *abcd*, ut radius ED ad radium *ed* (f). Ergo ratio ſphæræ ABCD ad ſphæram *abcd* eſt compoſita ex ratione radiorum ED, *ed*, & ex ratione eorundem *duplicata*. Hæc autem eſt ratio ipſorum radiorum *triplicata* (g). Ergo ſphæra ABCD eſt ad ſphæram *abcd* in ratione *triplicata* radii ED ad radium *ed*. Itaque ſphæræ &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) §. 119.
(b) §. 149.
(c) Lib. XI. §. 47, 50.
(d) Lib. I. §. 169.
(e) Lib. IX. §. 187.
(f) Ibidem §. 154.
(g) Lib. I. §. 35.

COROLLARIUM I.

Sphæra ſunt in ratione triplicata ſuarum diametrorum.

159. Sphærarum namque diametri ſunt directe inter ſe, ut earundem ſemidiametri (a).

COROLLARIUM II.

Sphæræ ſunt directe inter ſe, ut cubi ſuarum diametrorum, & ſemidiametrorum.

160. Cubi ſiquidem tam diametrorum, quam ſemidiametrorum ſunt in ratione ipſarum triplicata (b).

COROLLARIUM III.

Si ratio diametrorum, vel ſemidiametrorum duarum ſphærarum continuetur uſque ad quartum terminum, ſphæra eſt ad ſphæram, ut illorum primus ad quartum.

161. Primus enim quatuor terminorum continuo proportionalium eſt ad quartum in ratione *triplicata* primi ad ſecundum (c).

COROLLARIUM IV.

Sphæræ, quarum diametri ſint proportionales, inter ſe quoque ſunt proportionales.

162. Demonſtratur eodem modo, quo §. 153.

CO-

(a) Lib. I. §. 127.
(b) §. 124.
(c) Lib. I. §. 177.

Digitized by Google

COROLLARIUM V.

Diametri, & ſemidiametri ſphærarum ſunt in ratione ipſarum ſphærarum ſubtriplicata.

163. Ratio namque diametrorum, & ſemidiametrorum duarum ſphærarum hujuſmodi eſt, ut ex illa ducta in ſeipſam *duplicatam* ipſarum ſphærarum ratio conſurgat.

COROLLARIUM VI.

Si fuerint quatuor ſpharę proportionales, earum quoque diametri, & ſemidiametri erunt proportionales.

164. Hujus demonſtratio coincidit cum demonſtratione §. 157.

ELE-

Digitized by Google

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM
LIBER XIV.
De ſolidorum dimenſione.

QUemadmodum ea practicæ Geometriȩ pars, quæ modum exhibet dimetiendi figuras planas, *Planimetria* dicitur, ita illa, in qua de ſolidorum dimenſione diſſeritur, *Stereometria* nuncupatur. Hujus ergo fundamentalia principia hic exhibemus, & demonſtramus una cum nonnullis ex pulcherrimis diviniſque prorſus inventis, quæ duobus libris *de ſphæra, & cylindro* Archimedes tradidit.

DEFINITIO I.

1. *Digitus, palmus, pes, & pollex cubici ſunt cubi, quorum latus unius digiti, palmi, pedis, aut pollicis longitudini eſt æquale.* Ut ſi latus KL cubi KP fuerit digitalis longitudinis, cubus KP dicetur *digitus cubicus;* ſi pedalis, *pes cubicus*, atque ita de ceteris. Fig. 10. Tab. 10.

HYPOTHESIS I.

2. Magnitudo, ſive quantitas cujuſvis ſolidi determinatur per numerum digitorum, palmorum, pedum, vel pollicum cubicorum, quos area ipſius ſolidi adæquat. Illius vero ſuperficiei valor definitur per numerum digitorum, palmorum, pedum, aut pollicum quadratorum, cui ſuperficies ipſa eſt ȩqualis.

DEFINITIO II.

3. *Magnitudo itaque, ſive quantitas cujuſvis ſolidi dicitur no-*

ta, cum notum nobis fuerit, quot digitos, palmos, pedes, vel pollices cubicos illius area comprehendat. Notus quoque dicitur valor ſuperficiei dati ſolidi, cum nobis innoteſcit, quot digitos, palmos, pedes, aut pollices quadratos ipſa ſuperficies complectatur.

HYPOTHESIS II.

4. Pro definienda ſoliditate corporum, quæ a priſmate, & cylindro ſunt diverſa, ea ad priſma, vel ad cylindrum, prout opus fuerit, primo revocabimus. Similiter pro determinanda ſolidorum ſuperficie, ſuperficiem ipſam ad rectangulum reducemus. Conſtat enim, facili negotio valorem rectanguli palam fieri. Conſtabit quoque, ſoliditatem priſmatis, & cylindri facillime in aperto poni.

DEFINITIO III.

5. Quemadmodum ſi ſemicirculus ACB in gyrum agatur
Fig. 1. Tab. 11. circa quieſcentem diametrum AB, producitur ſphæra ACBD, ita ſi circa eandem diametrum revolvatur ſemiquadratum AEFB ſemicirculo ACB circumſcriptum, efficitur cylindrus rectus EFGH, qui ſphæræ ACBD *circumſcriptus* dicitur.

COROLLARIUM I.

6. *Axis, ſive altitudo cylindri recti ſphæræ circumſcripti diverſa non eſt a diametro inſcriptæ ſphæræ.* Eſt enim diameter ſemicirculi, ex cujus revolutione inſcripta ſphæra efficitur.

COROLLARIUM II.

7. *Diameter baſis cylindri recti ſphæræ circumſcripti eſt æqua-*
Fig. 1. Tab. 11. *lis diametro ipſius ſphæræ.* Diameter nimirum FG baſeos cylindri recti EG ſphæræ ACBD circumſcripti adæquat diametrum AB ipſius ſphæræ. Utraque enim diameter eſt dupla lateris FB ſemiquadrati genitoris AEFB.

CO-

COROLLARIUM III.

8. *Baſis cylindri recti ſphæræ circumſcripti eſt æqualis circulo maximo ipſius ſphæræ.* Videlicet circulus baſeos FG cylindri recti EFGH circumſcripti ſphæræ ACBD eſt æqualis circulo maximo ipſius ſphæræ. Cum enim diameter baſeos FG non differat a diametro ſphæræ inſcriptæ ACBD (a), circulus baſeos FG æquabit circulum in ſphæra, qui per ipſius ſphæræ centrum tranſit. Circulus autem, qui per ſphæræ centrum tranſit, eſt maximus in ipſa ſphæra (b). Ergo circulus baſeos FG cylindri EG ſphæræ ACBD circumſcripti adæquat circulum maximum ipſius ſpæræ. Fig. 1. Tab. 11.

COROLLARIUM IV.

9. *Axis, ſive altitudo cylindri recti ſphæræ circumſcripti eſt æqualis diametro baſeos ipſius cylindri.* Quandoquidem tam axis ipſius cylindri, quam diameter circuli baſeos ejusdem adæquat diametrum inſcriptę ſphæræ (c).

DEFINITIO IV.

10. Si quadratum CBDA, & quadrans circuli AMBD ſimul circa immotum latus AD revolvantur, ſicuti ex revolutione quadrantis AMBD habetur hemiſphærium BAE, ita ex rotatione completa quadrati CBDA emergit cylindrus rectus CBEF, qui hemiſphærio BAE *circumſcriptus* vocatur. Fig. 2. Tab. 11.

COROLLARIUM I.

11. *Circulus baſeos cylindri recti hemiſphærio circumſcripti eſt circulus maximus ſphæræ, cujus hemiſphærium ipſum eſt una medietas.* Sphæra namque non dividitur bifariam, niſi a circu-

(a) §. 7.
(b) Lib XII. §. 45.
(c) §. 6.

lo per illius centrum tranſeunte, (a), atque adeo in ipſa ſphæra maximo (b).

COROLLARIUM II.

12. *Diameter baſeos cylindri recti hemiſphærio circumſcripti diverſa non eſt a diametro baſeos hemiſphærii, ſive ſphæræ, cujus ipſum hemiſphærium eſt una medietas.* Patet ex præcedenti.

COROLLARIUM III.

13. *Latus cylindri recti hemiſphærio circumſcripti adæquat radium ipſius hemiſphærii.* Nimirum latus CB cylindri CE hemiſphærio BAE circumſcripti eſt æquale radio AD ipſius hemiſphærii. Omnia enim latera quadrati genitoris ACBD ſunt inter ſe æqualia (c).

DEFINITIO V.

Fig. 3. Tab. 11. 14. Si triangulo æquilatero ABC inſcriptus ſit circulus MEN, iſque ſimul cum ipſo triangulo circa communem axim AE revolvatur, duo fiunt ſolida, videlicet ſphæra MEN, & conus ęquilaterus BAC, qui ipſi ſphæræ *circumſcriptus* dicitur.

COROLLARIUM.

15. *Centrum ſphæræ cono æquilatero inſcriptæ diverſum non eſt a centro ipſius coni.* Etenim centrum trianguli genitoris BAC non differt a centro circuli genitoris MEN ipſi triangulo inſcripti (d).

THEO-

(a) Lib. XI. §. 53.
(b) Lib. XII. §. 45.
(c) Lib. VI. §. 2.
(d) Lib. IX. §. 16.

THEOREMA I.

Superficies priſmatis recti, ſecluſis baſibus, adæquat rectangulum ſub perimetro baſis, & ſub uno ipſius priſmatis latere comprehenſum.

16. Eſto priſma rectum AF trilateram habens baſim DEF. Dico, illius ſuperficiem, ſecluſis baſibus DEF, ABC, æquare rectangulum *ac* contentum ſub recta *dc*, quæ ſit æqualis perimetro baſis DEF, & ſub recta *ad*, quæ ſit æqualis uni laterum AD ipſius priſmatis. Fig. 4. Fig. 5. Tab. 11.

Demonſtratio.

Superficies priſmatis AF, baſibus ſecluſis, componitur ex tot rectangulis ejusdem altitudinis, quot ſunt latera in perimetro baſis DEF, nimirum ex tribus rectangulis æque altis ADEB, BEFC, CFDA (a). Tria autem hujuſmodi rectangula æqualia ſunt rectangulo *adcb*; cum poſito ſegmento *de* = DE, ſegmento *ef* = EF, & ſegmento *fc* = FD, ductiſque rectis *me*, *nf* parallelis tum inter ſe, tum lateribus *ad*, *bc*, adeoque ad perpendiculum inſiſtentibus baſi *dc*, rectangulum *adcb* diviſum ſit in tria rectangula tribus rectangulis, quibus priſmatica ſuperficies AF continetur, æqualia, alterum alteri (b), utpote ſupra æquales baſes *reſpective*, & ſub eadem altitudine per hypotheſim conſtituta. Ergo ſuperficies priſmatis AF, baſibus ſecluſis, eſt æqualis rectangulo *adcb*. Itaque ſuperficies priſmatis &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Superficies priſmatis recti, baſibus ſecluſis, adæquat rectangulum ſub perimetro baſis, & ſub illius altitudine comprehenſum.

17. Altitudo ſiquidem priſmatis recti ab illius latere diverſa non eſt (c). CO-

(a) Lib. XI. §. 20. (b) Lib. IX. §. 11. (c) Lib. XI. §. 21.

COROLLARIUM II.

Si baſis priſmatis recti fuerit figura regularis, illius ſuperficies, demtis baſibus, erit ad baſim, ut illius latus, ſive altitudo, ad dimidium cateti baſis.

18. Superficies nimirum recti priſmatis AB, cujus baſis
Fig. 6 CB ſit pentagonum regulare, erit ad baſim ipſam, ut latus,
Fig. 7. ſive altitudo AC, ad dimidium cateti *xy* ipſius baſis. Ete-
Fig. 8. Tab. II. nim baſis CB adęquat rectangulum *md* contentum ſub recta *nd*, quæ ſit æqualis perimetro ipſius baſis, & ſub recta *mn*, quæ ſit ęqualis dimidio cateti *xy*, ſicuti adæquat rectangulum ex dimidia parte perimetri in catetum (a). Superficies autem priſmatis AB eſt æqualis rectangulo *ab* contento ſub recta *cb* æquali perimetro baſis CB, & ſub recta *ac* æquali lateri, ſive altitudini AC (b). Ergo priſmatica ſuperficies AB, demtis baſibus, eſt ad ſuam baſim CB, ut rectangulum *ab* ad rectangulum *md*. Rectangulum porro *ab* eſt ad rectangulum *md* æqualis baſis per hypotheſim, ut latus, ſive altitudo *ac*, ad latus, ſive ad altitudinem *mn* (c). Ergo priſmatica quoque ſuperficies AB, baſibus ſecluſis, erit ad baſim CB, ut latus, ſive altitudo AC ad dimidium cateti *xy* ipſius baſis.

PROBLEMA I.

Superficiem priſmatis recti invenire.

19. Determinare oporteat ſuperficiem recti priſmatis AB.

Reſolutio.

Perimeter baſis CB ducatur in altitudinem, ſive in latus
Fig. 6. Tab. II. AC, & facto adjiciatur valor baſis CB bis ſumtus. Summa erit

(a) Lib. X. §. 30.
(b) §. 16.
(c) Lib. IX. §. 100.

erit valor totius ſuperficiei priſmaticæ AB quæſitus. Ut ſi perimeter baſis CB fuerit $=$ *a*, & altitudo $=$ *b*, valor ſuperficiei priſmatis AB, demtis baſibus, erit $=$ *ab*; ſique propterea valor baſis CB fuerit $=$ *mn*, tota priſmatis ſuperficies erit $=$ *ab* + 2*mn*.

Demonſtratio.

Facto ſiquidem *ab* æquale eſt rectangulum ſub perimetro baſis, & ſub latere ipſius priſmatis comprehenſum. Huic autem rectangulo æqualis eſt priſmatica ſuperficies AB, demtis baſibus (a). Ergo &c.

PROBLEMA II.

Invenire ſuperficiem priſmatis inclinati.

Reſolutio.

20. Determinetur valor omnium planorum, quibus priſma continetur. Horum omnium ſumma erit valor totius ſuperficiei priſmaticæ quæſitus.

Demonſtratio.

Totum quippe ęquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumtis (b).

SCHOLION.

Pro determinanda cubi, qui ſpecies eſt priſmatis, ſuperficie, ſatis eſt, ut inveniatur area unius ex illis ſex quadratis, quibus cubus comprehenditur, & valor hujuſmodi per *6.* multiplicetur. Factum enim dabit ſuperficiem cubi quęſitam.

THEO-

(a) §. 16. (b) Syn. Alg. §. 256.

THEOREMA II.

Superficies pyramidis recta, cujus baſis ſit figura regularis; adæquat, ſecluſa baſi, triangulum rectangulum, cujus alterum latus eorum, quæ ſunt circa angulum rectum, eſt æquale perimetro baſis, alterum altitudini unius ex illis iſoſcelibus triangulis, quibus pyramis continetur.

21. Eſto pyramis recta BAD, cujus baſis BCD ſit regularis. Dico, illius ſuperficiem, ſecluſa baſi BCD, æquare Arch.l.1 de ſph. p.7., 8. triangulum rectangulum *abc*, cujus alterum latus *bc* poſitum circa angulum rectum *abc*, ſit æquale perimetro baſis BCD, alterum *ab* ſit æquale altitudini A*e* trianguli iſoſcelis CAD, quo ſimul cum aliis pyramis ipſa continetur.

Demonſtratio.

Diviſo latere *bd* in tria ęqualia ſegmenta *bd*, *df*, *fc*, quemadmodum tria ſunt latera æqualia, quibus baſis BCD datæ pyramidis continetur, ductiſque rectis *ad*, *af*, tria triangula *bad*, *daf*, *fac*, utpote ſuper æquales baſes, & ſub eadem Fig. 9. altitudine conſtituta, erunt inter ſe æqualia (a). Æqualia Fig. 10. Tab. 11. ſunt autem inter ſe etiam tria triangula iſoſcelia, quibus ſuperficies pyramidis BAD, ſecluſa baſi, terminatur; eſtque triangulum *bad* æquale triangulo CAD (b); cum per hypotheſim eadem ſit utriuſque baſis, & altitudo. Ergo tria triangula *bad*, *daf*, *fac* ſimul ſumta, æqualia erunt tribus triangulis CAD, DAB, BAC ſimul itidem ſumtis, quibus, ſecluſa baſi, continetur ſuperficies pyramidis BAD; atque adeo triangulum *abc* ſuperficiem ipſam æquabit, demta baſi. Itaque ſuperficies pyramidis &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) Lib. IX. §. 93. (b) Ibidem.

COROLLARIUM I.

Superficies pyramidis rectæ, cujus baſis ſit figura regularis, adæquat, ſecluſa baſi, rectangulum contentum ſub perimetro baſis, & ſub dimidia altitudine unius ex illis iſoſcelibus triangulis, quibus, pyramis terminatur.

22. Superficies nimirum pyramidis rectæ BAD, cujus baſis ſit triangulum regulare, adæquat, ſecluſa ipſa baſi, rectangulum *mbcn* contentum ſub recta *bc*, quæ ſit æqualis dimidiæ altitudini *Ae* trianguli CAD. Rectangulo quippe *mbcn* æquale eſt triangulum *bac* (a), cui ſuperficies ipſius pyramidis, demta baſi, eſt æqualis. Fig. 9. Fig. 10. Tab. 11.

COROLLARIUM II.

Superficies pyramidis rectæ, cujus baſis ſit figura regularis, ſecluſa baſi, eſt ad ipſam baſim, ut altitudo unius ex illis triangulis pyramidem terminantibus ad catetum ejusdem baſis.

23. Videlicet ſuperficies rectæ pyramidis BAD, ſecluſa baſi BCD, eſt ad ipſam baſim, quæ ponitur figura regularis, ut altitudo *Ae* trianguli CAD ad catetum *xe* ejusdem baſis. Quandoquidem conſtitutis ex altitudine *Ae*, & ex perimetro baſis BCD triangulo rectangulo *abc*, nec non ex cateto *xe*, & ex eodem perimetro triangulo rectangulo *xey*, erit triangulum *abe* ad triangulum *xey* ejusdem baſis, ut altitudo, ſive latus *ab* ad altitudinem, ſive ad latus *xe* (b). Superficies autem pyramidis BAD, ſecluſa baſi, eſt æqualis triangulo *abc* (c), & baſis ipſa BCD adæquat triangulum rectangulum *xey* (d). Ergo ſuperficies pyramidis BAD, ſe- Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11. Tab. 11.

 cluſa

(a) Lib. IX. §. 102.
(b) Ibidem §. 101.
(c) §. 21.
(d) Lib. X. §. 29.

cluſa baſi BCD, eſt ad ipſam baſim, ut altitudo *Ae* ad catetum ejusdem baſis *xe*.

PROBLEMA III.

Determinare ſuperficiem pyramidis rectæ, cujus baſis ſit figura regularis.

24. Eſto pyramis recta BAD, cujus baſis BCD ſit figura regularis. Determinare oporteat illius ſuperficiem.

Reſolutio.

Fig. 9. Tab. II. Per dimidium altitudinis unius ex illis triangulis, quibus pyramis continetur, multiplicetur valor perimetri baſis, & facto valor baſis adiiciatur. Summa dabit ſuperficiem quęſitam. Ut ſi altitudo *Ae* trianguli CAD fuerit $= m$, & perimeter baſis BCD $= n$, valor ſuperficiei pyramidis BAD, ſecluſa baſi, erit $= \frac{mn}{2}$. Quamobrem ſi valor baſis BCD fuerit $= pr$, tota ſuperficies datæ pyramidis erit $= \frac{mn}{2} + pr$.

Demonſtratio.

Patet ex §. 22. hujus.

PROBLEMA IV.

Determinare ſuperficiem cujuſcunque pyramidis.

Reſolutio.

25. Inveniatur valor ſingulorum triangulorum, quibus pyramis ipſa terminatur, nec non valor baſis. Horum omnium ſumma erit ſuperficies quæſita.

De-

Digitized by Google

Demonſtratio.

Valor enim totius diverſus non eſt a valore omnium ſuarum partium ſimul ſumtarum.

THEOREMA III.

Superficies cylindri recti, ſeclusis baſibus, adæquat rectangulum ſub peripheria baſis, & ſub illius latere comprehenſum.

26. Eſto cylindrus rectus ACDB. Dico, illius ſuperficiem, demtis baſibus AB, CD, æquare rectangulum *acdb* ſub recta *cd*, quæ ſit æqualis perimetro baſis CD, & ſub recta *ac*, quæ ſit æqualis lateri AC ipſius cylindri, comprehenſum.

Demonſtratio.

Cylindrus quippe ACDB eſt priſma rectum infinitorum laterum (a). Superficies autem recti priſmatis, ſecluſis baſibus, eſt æqualis rectangulo contento ſub latere ipſius priſmatis, & ſub perimetro baſis (b). Ergo idipſum quoque verum eſt de ſuperficie recti cylindri ACDB. Superficies itaque cylindri &c. quod erat oſtendendum. Fig. 12. Fig. 13. Tab. 11.

SCHOLION.

27. Veritas hujus propoſitionis ex eo etiam patet, quod ſi ſuperficiei cylindri recti aptetur charta, ut illi omnino congruat, tum ipſa charta in planum extendatur, rectangulum illa exhibeat, cujus baſis æqualis eſt peripheriæ baſis, altitudo vero lateri ipſius cylindri.

X 2 co-

(a) Lib. XI. §. 70.
(b) §. 18.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Superficies cylindri recti, demtis baſibus, æqualis eſt rectangulo contento ſub peripheria baſis, & ſub illius axe.

28. Axis namque cylindri æqualis eſt ejuſdem lateri (a).

COROLLARIUM II.

Superficies cylindri recti, ſecluſis baſibus, æqualis eſt rectangulo contento ſub peripheria baſis, & ſub illius altitudine.

29. Etenim altitudo cylindri recti ab illius axe diverſa non eſt (b).

COROLLARIUM III.

Superficies cylindri recti, ſecluſis baſibus, eſt ad circulum baſis, ut latus, ſive axis ipſius cylindri ad dimidium radii, ſive ad quartam partem diametri ipſius baſis.

30. Coincidit cum demonſtratione tradita §. 18. hujus: Circuli namque catetus non differt ab illius radio (c), utque alibi oſtenſum eſt, circulus æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub peripheria, & ſub dimidia parte radii (d).

COROLLARIUM IV.

Superficies cylindri recti, cujus axis, ſive altitudo ſit æqualis diametro circuli baſis, demtis baſibus, eſt quadrupla circuli baſis.

31. Ut ſi axis, ſive altitudo *xy* cylindri recti ACDB fuerit æqualis diametro CD baſis CD ipſius cylindri, cylindrica

ca

(a) Lib. XI. §. 113.
(b) Lib. XI. § 19.
(c) Lib. IX. §. 150.
(d) Lib. X. §. 46.

Digitized by Google

ca ipſa ſuperficies, demtis baſibus, erit quadrupla circuli CD. Fig. 12.
Superficies namque cylindrica ACDB, ſecluſis baſibus, eſt Tab. 11.
ad circulum baſis CD, ut axis, ſive altitudo xy ad quartam partem diametri CD (a). Eſt autem per hypotheſim $xy = CD$. Ergo ſuperficies cylindrica ACDB erit ad circulum baſis CD, ut 4. ad 1.

COROLLARIUM V.

Superficies cylindri recti ſphæræ circumſcripti, ſecluſis baſibus, eſt quadrupla maximi circuli ipſius ſphæræ.

32. Curva nimirum ſuperficies cylindri recti EG ſphæræ ACBD circumſcripti eſt quadrupla circuli maximi ipſius Fig. 8.
ſphæræ. Maximus namque circulus inſcriptæ ſphæræ ACBD Tab. 11.
eſt æqualis circulo baſis FG ipſius cylindri (b).

COROLLARIUM VI.

Superficies cylindri recti, cujus axis ſit æqualis diametro circuli baſis, adæquat, ſecluſis baſibus, circulum ex diametro baſis deſcriptum.

33. Si nimirum axis xy cylindri recti AD fuerit æqualis diametro CD baſis, cylindrica ſuperficies AD, baſibus ſe- Fig. 12.
cluſis, æqualis erit circulo EG, cujus radius FE ſit æqualis Fig. 14.
diametro CD baſis, ipſius cylindri. Cum enim radius FE Tab. 11.
circuli EG, ſit duplus radii yC circuli baſis CD, ſintque circuli in ratione *duplicata* ſuorum radiorum (c), circulus EG erit quadruplo major circulo baſis CD (d). Curva autem cylindri AD ſuperficies eſt quadrupla circuli baſeos CD (e). Ergo ſuperficies ipſa circulum adæquat EG (f).

CO-

(a) §. 30.
(b) §. 8.
(c) Lib. IX. §. 185.
(d) Lib. I. §. 55.
(e) §. 31.
(f) Lib. I. §. 103.

Digitized by Google

COROLLARIUM VII.

Superficies cylindri recti ſphæræ circumſcripti, ſecluſis baſibus, adæquat circulum deſcriptum ex diametro ipſius ſphæræ.

34. Diameter namque inſcriptæ ſphæræ eſt æqualis diametro baſis ipſius cylindri (a), quam quidem diametrum axis ejuſdem cylindri itidem adæquat (b).

COROLLARIUM VIII.

Curva ſuperficies cylindrorum rectorum æquales baſes habentium ſunt inter, ut eorundem axes, ſive altitudines, ſeu latera.

35. Cum enim curva cylindri recti ſuperficies ſit æqualis rectangulo contento ſub peripheria baſeos, & ſub axe, ſive altitudine, ſeu latere (c), curvæ ſuperficies cylindrorum rectorum æquales baſes habentium erunt inter ſe, ut rectangula ſuper æquales baſes conſtituta. Hæc autem ſunt, ut eorum altitudines (d). Ergo &c.

COROLLARIUM IX.

Superficies curvæ cylindrorum rectorum, quorum axes, ſeu altitudines, ſive latera ſint æqualia, ſunt directe inter ſe, ut peripheriæ baſium.

36. Sunt enim inter ſe, ut rectangula æqualium altitudinum.

COROLLARIUM X.

Curvæ ſuperficies cylindrorum rectorum æquales axes, ſive altitudines, ſeu latera habentium ſunt inter ſe, ut baſium radii, & diametri.

37. Ratio namque tam radiorum, quam diametrorum diverſa non eſt a ratione peripheriarum (e).

CO-

(a) §. 7.
(b) § 9.
(c) §. 28.
(d) Lib. IX. §. 100.
(d) Ibidem §. 154., 155.

COROLLARIUM XI.

Si cylindrus rectus ſecetur plano baſi parallelo, curvæ ſegmentorum ſuperficies erunt inter ſe, ut ſegmenta axis, ſive lateris, ſeu altitudinis.

38. Si nimirum cylindrus rectus AD ſecetur plano *mn* baſi CD parallelo, curva ſuperficies ſegmenti *An* erit ad ſuperficiem curvam ſegmenti *mD*, ut ſegmentum axis *xz* ad ſegmentum axis *zy*, ſive ut ſegmentum lateris *Am* ad ſegmentum lateris *mC*. Segmenta namque *An*, *mD* ſunt cylindri baſium æqualium (a). Fig. 11. Tab. 11.

PROBLEMA V.

Curvam cylindri recti ſuperficiem determinare.

39. Invenire oporteat ſuperficiem curvam recti cylindri AD.

Reſolutio.

Invento valore peripheriæ baſeos CD (b), multiplicetur per ipſum valor lateris AC. Factum dabit ſuperficiem quæſitam. Ut ſi peripheria baſis CD fuerit $= a$, & valor lateris AC$= b$, erit *ab* valor ſuperficiei cylindricæ AD, ſecluſis baſibus. Fig. 12. Tab. 11.

Demonſtratio.

Eſt enim *ab* valor rectanguli, cui cylindrica ipſa ſuperficies eſt æqualis (c).

THEO-

(a) Lib. XI. § 82.
(b) Lib. X. §. 40.
(c) §. 26.

Digitized by Google

THEOREMA IV.

Superficies cylindri recti, ſecluſis baſibus, æqualis eſt circulo, cujus radius eſt media proportionalis inter cylindri latus, & diametrum baſis.

Arch. lib. 1. de Cyh. p. 21 — 40. Inter latus AC cylindri recti AD, & diametrum CD baſis CD ſit media proportionalis recta FG. Dico, curvam cylindri AD ſuperficiem æquare circulum HK ex illa recta deſcriptum.

Demonſtratio.

Cum enim per hypotheſim recta, ſive radius FG ſit media proportionalis inter latus AC, & diametrum baſis CD, rectangulum ACDB æquale erit quadrato MG (a). (Fig. 15.) Rectangulo autem ACDB æquale eſt rectangulum EC*ab* contentum (Fig. 16.) ſub radio C*a* baſis CD, & ſub recta EC dupla lateris AC, adeoque ſuper dimidiam baſim, & ſub dupla altitudine conſtitum (b). Ergo rectangulum quoque EC*ab* æquale erit quadrato MG (c); ac proinde latus, ſive radius FG erit media proportionalis inter latus EC, & radium baſis C*a* (d). (Fig. 17. Tab. 11.) Rurſus cum curva ipſius cylindri ſuperficies adequet rectangulum *cdfe* comprehenſum ſub recta *cd*, quæ ſit æqualis lateri AC ipſius cylindri, & ſub recta *df* æquali peripheriæ baſeos CD (e), eadem quoque ſuperficies æquabit triangulum rectangulum *dbf* ſuper eandem baſim *df*, & ſub dupla altitudine *bd* conſtitutum (f), quod hujuſmodi triangulum ſit rectangulo *cdfe* æquale (g). Circulus autem baſis CD æqualis eſt triangulo rectangulo *dmf*, cujus altitudo *md* ſit æqualis radio *Ca*, & baſis *df* ejuſdem peripheriæ (h). Ergo curva cylindri AD ſuperficies erit ad circulum baſis CD, ut triangulum *dbf* ad triangulum *dmf*; cumque triangulum *dbf* ſit ad triangulum *dmf*,

(a) Lib. IX §. 111.
(b) Ibibem §. 102.
(c) Syn. Algeb. §. 259.
(d) Lib. IX. §. 118.
(e) §. 26.
(f) Synop. Alg. §. 261.
(g) Lib. IX. §. 102.
(h) Lib. X §. 43.

dmf, ut recta *hl* ad rectam *md* (a), ſive per hypotheſim ut recta EC dupla lateris AC ad radium *Ca* baſis CD, curva ipſa cylindri ſuperficies erit ad circulum baſis CD, ut eſt recta EC ad rectam *Ca* (b). Circulus porro HK eſt ad circulum baſis CD, ut eadem ipſa recta EC ad eandem *Ca*; cum tam circulus HK ſit ad circulum CD (c), quam recta EC ad rectam *Ca* in ratione *duplicata* radii, ſive rectæ FG ad radium, ſive ad rectam *Ca* (d), ex eo nimirum, quod radius FG ſit media proportionalis inter rectam EC, & radium *Ca*, ut jam demonſtravimus. Ergo curva cylindri AD ſuperficies, circuluſque HK eandem ad circulum baſis CD rationem habent (e), ac proinde ſunt inter ſe æquales (f). Superficies itaque cylindri recti &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Curva cylindri recti ſuperficies adæquat circulum, cujus radius ſit media proportionalis inter illius axim, & diametrum baſis, ſicuti etiam inter illius altitudinem, & eandem diametrum,

41. Axis namque cylindri eſt æqualis lateri (g), & altitudo cylindri recti ab illius axe diverſa non eſt (h).

COROLLARIUM II.

Curva cylindri recti ſuperficies eſt ad circulum baſis, ut recta, quæ ſit dupla lateris, axis, ſive altitudinis, ad radium baſis.

42. Demonſtravimus enim, curvam cylindri AD ſuperficiem eſſe ad circulum baſis CD, ut recta EC=2AC ad rectam *Ca*, quæ eſt radius baſis CD. Fig. 15. Tab. 11.

(a) Lib. IX. §. 101.
(b) Lib. I. §. 78.
(c) Lib. IX. §. 185.
(d) Lib. I. §. 177.
(e) Ibidem §. 76.
(f) Ibidem §. 103.
(g) Lib. XI. §. 115.
(h) Ibidem §. 39.

Digitized by Google

THEOREMA V.

Curva cylindri recti ſuperficies eſt ad circulum baſis, ut rectangulum per axim ad quadratum radii ejuſdem baſis.

43. Eſto cylindrus rectus AD. Dico, curvam illius ſuperficiem eſſe ad circulum baſis CD, ut eſt rectangulum per axim ACDB, quod nempe ſub latere cylindri, & ſub diametro baſis ejuſdem continetur, ad quadratum *ya* radii *Ca* ejuſdem baſis.

Demonſtratio.

Poſita namque recta FG media proportionali inter latus
Fig. 15. AC, & diametrum CD, quadratum FMKG ęquabit rectan-
Fig. 16.
Tab. 11. gulum ACDB (a). Circulus autem HK eſt ad circulum baſis CD, ut quadratum FK ad quadratum *ya* (b). Ergo circulus HK erit ad circulum baſis CD, ut rectangulum ACDB ad quadratum *ya* (c). Curva porro cylindri AD ſuperficies adęquat circulum HK (d). Ergo ipſa eadem ſuperficies erit quoque ad circulum baſis CD, ut eſt rectangulum ACDB ad quadratum *ya* (e). Itaque curva &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA VI.

Curvæ cylindrorum rectorum ſuperficies ſunt directe inter ſe, ut rectangula per axim.

44. Sint duo cylindri recti AD, *ad*. Dico, curvam ſuperficiem cylindri AD eſſe ad curvam ſuperficiem cylindri *ad*, ut eſt rectangulum ACDB ad rectangulum *acdb*, quæ per illorum axim tranſeunt.

De-

(a) Lib. IX. §. 111.
(b) Ibidem §. 188.
(c) Lib. I. §. 102.
(d) §. 41.
(d) Lib. I. §. 102.

Demonſtratio.

Poſita namque recta FG media proportionali inter latus AC, & diametrum baſis CD, ſicuti etiam recta *fg* media proportionali inter latus *ac*, & diametrum baſis *cd*, deſcriptiſque circulis HK, *hk*, quorum illæ ſint radii, nec non quadratis FK, *fk* ſuper eaſdem conſtitutis, erit quadratum FK æquale rectangulo ACDB, & quadratum *fk* æquale rectangulo *acdb* (a); ac proinde rectangulum ACDB erit ad rectangulum *acdb*, ut quadratum FK ad quadratum *fk*. Circulus autem HK eſt ad circulum *hk*, ut eſt quadratum FK ad quadratum *fk* (b). Ergo circulus HK erit quoque ad circulum *hk*, ut rectangulum ACDB ad rectangulum *acdb* (c). Curva porro cylindri AD ſuperficies adæquat circulum HK, & curva ſuperficies cylindri *ad* circulum *hk* (d). Ergo curva itidem cylindri AD ſuperficies erit ad curvam ſuperficiem cylindri *ad*, ut eſt rectangulum ACDB ad rectangulum *acdb*. Itaque curvæ cylindrorum rectorum ſuperficies &c. quod erat oſtendendum. Fig. 15. Fig. 18. Fig. 16. Fig. 19. Tab. 11.

COROLLARIUM.

Curvæ cylindrorum rectorum ſuperficies ſunt directe inter ſe, ut rectangula ex latere in radium baſis.

45. Hujuſmodi namque rectangula ſunt directe inter ſe, ut rectangula per axim (e); cum ſint illorum partes dimidię (f).

LEMMA I.

Omnia latera coni recti ſunt inter ſe æqualia.

46. In cono recto BAE ſpectentur latera AB, AC, AD, AE. Dico, ea eſſe inter ſe æqualia.

(a) Lib IX. §. 111.
(b) Ibidem § 118.
(c) Lib. I. § 76.
(d) §. 41.
(e) Lib. I. § 126.
(f) Lib. IX. §. 95.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Fig. 20. Tab. 11. Cum enim conus ſit rectus, illius axis Az perpendicularis erit circulo baſis BE, ad cujus centrum z inſiſtit (a). Rectæ autem AB, AC, AD, AE cadunt ab eodem puncto A perpendicularis Az in peripheriam circuli BE. Ergo ſunt omnes inter ſe æquales. Omnia itaque latera &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

47. *Curva coni recti ſuperficies conſurgit ex infinitis triangulis iſoſcelibus, inter ſe mutuo æquilateris, adeoque æqualibus, baſim infinite parvam habentibus, ſimulque penes latera unitis.* Conus enim quicunque eſt pyramis infinitis triangulis comprehenſa, quorum latera a lateribus ipſius coni non ſunt diverſa.

THEOREMA VII.

Superficies coni recti, ſecluſa baſi, adæquat ſectorem circuli, cujus arcus ſit æqualis peripheriæ baſis, radius vero lateri ipſius coni.

48. Eſto conus rectus BAE, atque ſector circuli *bae*, cujus arcus *be* ſit æqualis peripheriæ baſeos BE ipſius coni, radius vero *ab* ejuſdem lateri AB. Dico, ſuperficiem coni BAE, ſecluſa baſi BE, æquare ſectorem *bae*.

Demonſtratio.

Triangulum BAC ſit unum ex illis infinitis iſoſcelibus, Fig. 20. atque inter ſe æqualibus triangulis, quibus componitur cur- Fig. 21. va coni BAE ſuperficies (c). Sumta autem in arcu *be* ſecto- Tab. 11. ris *bac* particula infinite parva *be*, quæ ſit æqualis baſi BC trianguli BAC, ductoque radio *ae*, cum omnes circuli radii ſint

(a) Lib XI. §. 33. (b) Lib. VIII. §. 23. (c). §. 47.

ſint inter ſe æquales (a), ſitque radius *ab* æqualis lateri AB coni, triangulum *bae* æquilaterum erit triangulo BAC; ac proinde duo ipſa triangula erunt inter ſe æqualia (b). Igitur, cum arcus *bc* poſitus ſit æqualis peripheriæ baſeos BE coni BAE, in tot triangula iſoſcelia triangulo *bae* æqualia reſolvi poterit ſector *bac*, in quot triangula itidem iſoſcelia, trianguloque BAC æqualia reſolvitur curva ſuperficies coni BAE; eritque propterea curva ipſa coni ſuperficies ad ſectorem *bac*, ut eſt triangulum BAC ad triangulum *bae* (c). Triangulum autem BAC eſt æquale triangulo *bae*. Ergo ipſa quoque curva coni BAE ſuperficies ſectorem *bac* æquabit (d). Itaque curva coni recti &c. quod erat oſtendendum.

S C H O L I O N.

49. Id quoque perſpicuum fiet, ſi charta ita aptetur curvæ ſuperficiei coni BAE, ut illi plane congruat, tum charta ipſa in planum extendatur. Hæc enim ſectorem circuli exhibebit ſectori *bac* omnino æqualem.

C O R O L L A R I U M I.

Curva coni recti ſuperficies adęquat triangulum rectangulum, cujus altitudo ſit æqualis lateri ipſius coni, altitudo vero peripheriæ baſeos ejuſdem.

50. Superficies nimirum coni recti BAE, ſecluſa baſi BE, æqualis erit triangulo rectangulo *mdn*, cujus altitudo *md* ſit Fig. 20. æqualis lateri AB, & baſis *mn* peripheriæ circuli baſeos BE Fig. 22. ipſius coni. Triangulum quippe *mdn* eſt æqualis ſectori *bac* Fig. 21. (e), quem conica ipſa ſuperficies adęquat (f). Tab. 32.

CO-

(a) Lib. VII. §. 10.
(b) Lib. V. §. 14.
(c) Lib. I. §. 127.
(d) Ibidem §. 45.
(e) Lib. X. §. 54.
(f) §. 48.

COROLLARIUM II.

Curva coni recti ſuperficies adæquat rectangulum contentum ſub dimidio latere coni, & ſub recta, quæ baſeos peripheriç ſit æqualis.

51. Bifariam nempe diviſo latere *dm*, quod poſuimus æquale lateri AB coni recti BAE, conſtitutoque ſub ſegmento *em*, & ſub recta *mn*, quæ æqualis poſita eſt peripheriæ baſeos BE, rectangulo *en*, curva coni BAE ſuperficies rectangulum ipſum *en* æquabit. Rectangulum quippe *en* adequat triangulum *mdn* (a), cui curva ipſius coni ſuperficies eſt æqualis (b).

Fig. 10. Fig. 22. Tab. II.

COROLLARIUM III.

Curva coni recti ſuperficies eſt ad circulum baſis, ut ipſius coni latus ad ejuſdem radium.

52. Videlicet curva ſuperficies coni recti BAE eſt ad circulum baſis BE, ut latus AB ad radium baſis BE. Ducta namque recta *mn* æquali peripheriæ baſeos BE, erectaque perpendiculari *dm* æquali lateri AB, & ſumto in illa ſegmento *xm*, quod ſit æquale radio *Bz*, curva coni ſuperficies BAE æquabit triangulum rectangulum *dmn* (c), & circulus baſis BE triangulum rectangulum *xmn* (d); eritque propterea ſuperficies coni ad circulum baſis, ut triangulum *dmn* ad triangulum *xmn*. Triangulum autem *dmn* eſt ad triangulum *xmn*, ut eſt altitudo *dm* ad altitudinem *xm* (e), ſive ut latus AB ad radium *Bz* baſis BE. Ergo curva quoque coni BAE ſuperficies erit ad circulum baſis BE, ut eſt latus *AB* ad radium *Bz* (f).

Arch. l. 1. de ſph. p. 15 Fig. 20. Fig. 22. Tab. II.

CO-

(a) Lib. IX §. 102.
(b) §. 50.
(c) §. 50.
(d) Lib. X. §. 43.
(e) Lib. IX. §. 101.
(f) Lib. I. §. 77.

COROLLARIUM IV.

Super ficies curvæ conorum rectorum æquales baſes habentium ſunt directe inter ſe, ut ipſorum latera.

53. Enimvero, cum curva recti coni ſuperficies ſit æqualis triangulo rectangulo, cujus altitudo adęquat latus, & baſis peripheriam baſeos ipſius coni (a), ſuperficies curvæ conorum rectorum æquales baſes habentium erunt inter ſe, ut triangula rectangula baſium æqualium. Hęc autem ſunt, ut altitudines (b). Ergo ipſæ quoque conorum ſuperficies erunt, ut ipſorum latera.

COROLLARIUM V.

Superficies curvæ conorum rectorum habentium latera æqualia ſunt, ut peripheriæ baſeos.

54. Sunt enim, ut triangula rectangula, quorum altitudines ſint æquales.

COROLLARIUM VI.

Superficies curvæ conorum rectorum latera æqualia habentium ſunt directe inter ſe, ut ſuarum baſium radii, & diametri.

55. Quandoquidem circulorum tam radii, quam diametri ſunt *reſpective* inter ſe, ut ipſorum circulorum peripheriæ (c).

PRO-

(a) §. 50.
(b) Lib. IX. §. 101.
(c) Lib. IX. §. 154., 155.

Digitized by Google

PROBLEMA VI.

Curvam coni recti ſuperficiem invenire.

56. *Eſto* conus rectus BAE, cujus curvam ſuperficiem determinare oporteat.

Reſolutio.

Invento valore peripheriæ baſeos BE (a), per ipſum mul-
Fig. 10. Tab. II. tiplicetur valor dimidii lateris AB. Factum dabit valorem ſuperficiei conicæ BAE, demta baſi BE. Ut ſi peripheria baſis BE fuerit $= a$, & valor dimidii lateris AB fuerit $= b$, curva coni BAE ſuperficies erit $= ab$.

Demonſtratio.

Factum quippe ab exprimit valorem rectanguli, cui conica ipſa ſuperficies eſt æqualis (b).

THEOREMA VIII.

Curva coni recti ſuperficies adæquat circulum, cujus radius ſit media proportionalis inter latus ipſius coni, & radium baſis.

57. Recta EF ſit media proportionalis inter latus AB coni
Arch. lib. 1. de ſph. p. 14 recti BAC, & radium BD baſis BC ejuſdem, atque ex recta EF, veluti radio, deſcribatur circulus EF. Dico, curvam coni BAC ſuperficiem æquare circulum EG.

Demonſtratio.

Cum enim circulus EG ſit ad circulum baſis BC in ratione

(a) Lib. X. §. 40 (b) §. 51.

Digitized by Google

ne *duplicata* radii EF ad radium BD (a); ſitque itidem latus AB ad radium BD in ratione *duplicata* ejuſdem radii EF ad radium BD (b), ex eo nimirum quod tres rectæ AB, EF, BD poſitæ ſint continuo inter ſe proportionales, erit circulus GE ad circulum baſis BC, ut latus AB ad radium BD (c). Curva autem coni BAC ſuperficies eſt ad circulum baſis BC, ut latus AB ad radium BD (d). Ergo curva ipſa coni BAC ſuperficies erit ad circulum baſis BC, ut ad eundem circulum BC ſe habet circulus EG (e); ac proinde conica ipſa eadem ſuperficies circulum EG æquabit (f). Itaque curva coni &c. quod erat oſtendendum. Fig. 1. Fig. 2. Tab. 12.

THEOREMA IX.

Curvę conorum rectorum ſuperficies ſunt directe inter ſe, ut rectangula ſub eorum lateribus, & baſium radiis comprehenſa.

58. Sint duo coni recti BAC, *bac*. Dico, curvam ſuperficiem coni BAC eſſe ad curvam ſuperficiem coni *bac*, ut rectangulum KHBA contentum ſub latere AB, & ſub recta BH æquali radio BD baſis BC ad rectangulum *khba*, quod ſub latere *ab*, & ſub recta *bh*, quæ radio *bd* baſis *bc* ſit æqualis, continetur. Fig. 1. Fig. 3. Tab. 12.

Demonſtratio.

Radius EF circuli EG ſit media proportionalis inter latus AB coni BAC, & radium BD baſis, ſicuti etiam radius *ef* circuli *eg* inter latus *ab* coni *bac*, & radium *bd* baſis ejuſdem. Erit ergo curva coni BAC ſuperficies æqualis circulo EG, & curva coni *bac* ſuperficies circulo *eg* (g); ac proinde curva ſuperficies coni BAC erit ad curvam ſuperficiem coni *bac*, ut eſt circulus EG ad circulum *eg*; adeoque ut quadratum itidem Fig. 2. Fig. 4. Tab. 12.

(a) Lib. IX. §. 185.
(b) Lib. I. §. 177.
(c) Ibidem §. 78.
(d) §. 52.
(e) Lib. I. §. 78.
(f) Ibidem §. 103.
(g) §. 57.

L E M M A II.

In omni parallelogrammo complementa eorum parallelogrammorum, quæ circa diametrum exiſtunt, ſunt inter ſe æqualia.

62. Per punctum G diagonalis AC parallelogrammi ABCD ducatur recta EF parallela lateribus AB, DC, & recta HK parallela lateribus AD, BC, ut proinde totum ipſum parallelogrammum diviſum ſit in quatuor parallelogramma HE, GD, BG, FK. Dico, parallelogramma BG, GD, quæ dicuntur complementa duorum HE, FK circa diametrum AC exiſtentium, eſſe inter ſe æqualia.

Fig. 7. Tab. 12. Euclid. l. 1. p. 43

Demonſtratio.

Quoniam triangula ACD, ACB ſunt æqualia, ſicuti etiam triangula GCK, GCF (a), ſi triangulo ACD dematur triangulum GCK, & triangulo ACB triangulum GCF, trapezium AGKD æquale erit trapezio AGFB (b). Triangulum porro AGE adæquat triangulum AGH (c). Ergo, his ſublatis, parallelogrammum GD parallelogrammum BG æquabit (d). Itaque in omni parallelogrammo &c. quod erat oſtendendum.

L E M M A III.

In omni fruſto coni recti rectangulum contentum ſub diametro circuli intermedii, & ſub latere ipſius fruſti adæquat rectangula, quæ fiunt ex eodem latere in radios circulorum parallelorum fruſtum ipſum terminantium.

63. Eſto conus rectus BAC, in quo ducto plano DE cir-

(a) Lib. VI. §. 21.
(b) Syn. Algeb. §. 266.
(c) Lib. VI. §. 21.
(d) Syn. Algeb. §. 266.

circulo baſis BC parallelo, ſpectetur fruſtum BDEC. Recta Fig. 1. Tab. 11.
autem FG ſit diameter circuli circulis DE, BC paralleli,
atque biſariam dividentis latera DB, EC ipſius fruſti.
Dico, rectangulum contentum ſub recta FG, & ſub latere
D*B* fruſti conici *B*DEC, æquale eſſe rectangulis ſimul ſumtis, quæ fiunt ex eodem latere D*B* in radios DM, *B*H circulorum DE, *B*C fruſtum ipſum terminantium.

Demonſtratio.

Cum tres circuli DE, FG, BC poſiti ſint paralleli, eorum diametri DE, FG, BC in eodem plano BAC exiſtentes erunt inter ſe parallelæ (a). Quamobrem erit DE . FG :: AD . AF, & FG . BC :: AF . AB (b). Tres autem rectæ AD, AF, AB ſunt inter ſe arithmetice proportionales (c); cum earum exceſſus DF, FB poſiti ſint æquales. Ergo tres quoque DE, FG, BC artithmetice inter ſe proportionales erunt; ac proinde ſumma extremarum DE, BC dupla erit mediæ FG (d). Eſt autem ipſa eadem ſumma duarum DE, BC dupla ſummæ radiorum DM, BH. Ergo ſumma radiorum DM, BH æquabit mediam FG. Quapropter rectangulum contentum ſub recta FG, & ſub latere DB æquale erit rectangulis ſimul ſumtis, quæ ſub eodem latere DB, & ſub radiis DM, BH continentur (e). In omni igitur fruſto coni recti &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XI.

Superficies fruſti coni recti eſt ad ſuperficiem integri coni, ut rectangulum contentum ſub latere fruſti, & ſub diametro circuli fruſtum ipſum in medio dividentis, ad rectangulum, quod ſub latere totius coni, & ſub baſis radio continetur.

64. Sit BDEC fruſtum coni recti BAC, quod per medium di-

(a) Lib. VIII. §. 26.
(b) Lib. IX. §. 52.
(c) Lib. I. §. 190.
(d) Ibidem §. 196.
(e) Syn. Alg. §. 256.

dem MF radii EF ad quadratum *mf* radii *ef*; cum hujuſmodi quadrata eam inter ſe rationem habeant, quam ipſi circuli (a). Rectangulum autem KHBA eſt æquale quadrato MF, & rectangulum *khba* quadrato *mf* (b); ut propterea ratio rectanguli KHBA ad rectangulum *khba* non ſit diverſa a ratione quadrati MF ad quadratum *mf*. Ergo curva quoque ſuperficies coni BAC erit ad curvam ſuperficiem coni *bac*, ut eſt rectangulum KHBA ad rectangulum *khba*. Itaque curvæ conorum rectorum &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Curvæ ſuperficies conorum rectorum æquales baſes habentium ſunt directe inter ſe, ut eorum latera.

59. Ut ſi baſium circuli BC, *bc* fuerint æquales, ſuperficies coni BAC erit ad ſuperficiem coni *bac*, ut latus AB ad latus *ab*. Cum enim circuli baſium nequeant eſſe æquales, quin eorum itidem radii *BD*, *bd* ſint æquales (c), rectangula KB, *kb* erunt hoc ipſo, ut latera AB, *ab* (d). Ergo in eadem quoque ratione erunt ipſorum conorum ſuperficies.

COROLLARIUM II.

Curvæ ſuperficies conorum rectorum, quorum latera ſint æqualia, ſunt directe inter ſe, ut baſium radii.

60. Hanc enim proportionem habent rectangula, quibus ſuperficies ipſæ proportionaliter reſpondent (e).

CO-

(a) Lib. IX. §. 188.
(b) Ibidem §. 111.
(c) Ibidem §. 50.
(d) Ibidem §. 100.
(e) Ibidem §. 95.

THEOREMA X.

Curva ſuperficies coni recti eſt ad curvam ſuperficiem cylindri itidem recti, ut rectangulum contentum ſub latere coni, & ſub radio baſeos ad rectangulum per axim ipſius cylindri.

61. Eſto conus rectus *bac*, & cylindrus rectus AC. Dico, conicam ſuperficiem *bac* eſſe ad ſuperficiem cylindricam Fig. 3. ABCD, baſibus ſecluſis, ut rectangulum *khba*, quod ſub la- Fig. 5. Tab. 12. tere *ab*, & ſub radio *bd* baſeos continetur, ad rectangulum per axim ABCD.

Demonſtratio.

Facta hypotheſi, ut radius *ef* circuli *eg* ſit media proportionalis inter latus *ab* coni, & radium *bd* baſis ejuſdem, quemadmodum etiam radius EF circuli EG inter latus AB cy- Fig. 4. Fig. 6. Tab 12. lindri, & baſeos diametrum BC, conica ſuperficies *bac* æquabit circulum *eg* (a), & ſuperficies cylindrica AC circulum EG (b) quamobrem conica ſuperficies *bac* erit ad ſuperficiem cylindricam ABCD, baſibus ſecluſis, ut eſt circulus *eg* ad circulum EG; adeoque etiam ut quadratum *en* ad quadratum EN (c). Quadratum autem *en* adæquat rectangulum *khba*, & quadratum EN rectangulum ABCD (d); ut proinde ratio rectanguli *khba* ad rectangulum ABCD diverſa non ſit a ratione quadrati *en* ad quadratum EN. Ergo conica ſuperficies *bac* erit ad ſuperficiem cylindricam ABCD, demtis baſibus, ut rectangulum *khba* ad rectangulum ABCD (e). Itaque curva coni recti &c. quod erat oſtendendum.

(a) §. 57.
(b) §. 41.
(c) Lib. IX. §. 118.
(d) Ibidem §. 111.
(e) Lib. I. §. 78.

LEMMA II.

In omni parallelogrammo complementa eorum parallelogrammorum, quæ circa diametrum exiſtunt, ſunt inter ſe æqualia.

62. Per punctum G diagonalis AC parallelogrammi ABCD ducatur recta EF parallela lateribus AB, DC, & recta HK parallela lateribus AD, BC, ut proinde totum ipſum parallelogrammum diviſum ſit in quatuor parallelogramma HE, GD, BG, FK. Dico, parallelogramma BG, GD, quæ dicuntur complementa duorum HE, FK circa diametrum AC exiſtentium, eſſe inter ſe æqualia.

Fig. 7. Tab. 12. Euclid. l. 1. p. 43

Demonſtratio.

Quoniam triangula ACD, ACB ſunt æqualia, ſicuti etiam triangula GCK, GCF (a), ſi triangulo ACD dematur triangulum GCK, & triangulo ACB triangulum GCF, trapezium AGKD æquale erit trapezio AGFB (b). Triangulum porro AGE adæquat triangulum AGH (c). Ergo, his ſublatis, parallelogrammum GD parallelogrammum BG æquabit (d). Itaque in omni parallelogrammo &c. quod erat oſtendendum.

LEMMA III.

In omni fruſto coni recti rectangulum contentum ſub diametro circuli intermedii, & ſub latere ipſius fruſti adæquat rectangula, quæ fiunt ex eodem latere in radios circulorum parallelorum fruſtum ipſum terminantium.

63. Eſto conus rectus BAC, in quo ducto plano DE cir-

(a) Lib. VI. §. 21.
(b) Syn. Algeb. §. 266.
(c) Lib. VI. §. 21.
(d) Syn. Algeb. §. 366.

circulo baſis BC parallelo, ſpectetur fruſtum BDEC. Recta Fig. 1.
autem FG ſit diameter circuli circulis DE, BC paralleli, Tab. 12.
atque biſariam dividentis latera DB, EC ipſius fruſti. Dico, rectangulum contentum ſub recta FG, & ſub latere DB fruſti conici BDEC, æquale eſſe rectangulis ſimul ſumtis, quæ fiunt ex eodem latere DB in radios DM, BH circulorum DE, BC fruſtum ipſum terminantium.

Demonſtratio.

Cum tres circuli DE, FG, BC poſiti ſint paralleli, eorum diametri DE, FG, BC in eodem plano BAC exiſtentes erunt inter ſe parallelæ (a). Quamobrem erit DE . FG :: AD . AF, & FG . BC :: AF . AB (b). Tres autem rectæ AD, AF, AB ſunt inter ſe arithmetice proportionales (c); cum earum exceſſus DF, FB poſiti ſint æquales. Ergo tres quoque DE, FG, BC artithmetice inter ſe proportionales erunt; ac proinde ſumma extremarum DE, BC dupla erit mediæ FG (d). Eſt autem ipſa eadem ſumma duarum DE, BC dupla ſummæ radiorum DM, BH. Ergo ſumma radiorum DM, BH æquabit mediam FG. Quapropter rectangulum contentum ſub recta FG, & ſub latere DB æquale erit rectangulis ſimul ſumtis, quæ ſub eodem latere DB, & ſub radiis DM, BH continentur (e). In omni igitur fruſto coni recti &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XI.

Superficies fruſti coni recti eſt ad ſuperficiem integri coni, ut rectangulum contentum ſub latere fruſti, & ſub diametro circuli fruſtum ipſum in medio dividentis, ad rectangulum, quod ſub latere totius coni, & ſub baſis radio continetur.

64. Sit BDEC fruſtum coni recti BAC, quod per medium di-

(a) Lib. VIII. §. 16.
(b) Lib. IX. §. 52.
(c) Lib. I. §. 190.
(d) Ibidem §. 196.
(e) Syn. Alg. §. 356.

Digitized by Google

Arch. l. 1 de ſph. p. 16. dividatur a circulo, cujus diameter ſit recta FG. Conſtituatur autem ſub recta BR, quæ rectam adæquet FG, & ſub latere DB ipſius fruſti rectangulum RD, ſub recta vero BN æquali radio BH baſeos BC, & ſub latere AB coni rectangulum BT. Dico, curvam ſuperficiem fruſti conici BDEC eſſe ad ſuperficiem curvam integri coni BAC, ut eſt rectangulum RD ad rectangulum BT.

Demonſtratio.

Ducta in parallelogrammo BT diagonali AN, & per Fig. 1. Tab. 12. punctum P, in quo diagonalis ipſa a latere DX parallelogrammi RD ſecatur, recta SV lateribus TN, AB parallelogrammi BT parallela, cum tam recta DM ſit ad rectam BH, quam recta PD ad rectam NB, ut ſegmentum AD ad latus AB (a); erit DM. BH = DP. BN (b). Eſt autem per hypotheſim BN = BH. Ergo erit quoque PD = DM (c); atque adeo parallelogrammum rectangulum DS comprehenſum erit ſub latere AD coni recti DAE, & ſub radio DM baſis ejus. Igitur curva ſuperficies coni BAC erit ad curvam ſuperficiem coni DAE, ut rectangulum BT ad rectangulum DS (d), & *dividendo per converſionem rationis* ſuperficies fruſti conici BDEC erit ad ſuperficiem totius coni BAC, ut rectangulum BNQD ſimul cum rectangulo QPST ad rectangulum DS (e). Rectangulum autem QPST adæquat rectangulum PVBD (f); & rectangulum PVBD illud eſt, quod ſub latere DB, & ſub radio DM circuli DE continetur. Ergo ſuperficies fruſti conici BDEC erit ad curvam ſuperficiem integri coni BAC, ut rectangulum BNQD una cum rectangulo *B*VPD ad rectangulum BT. Duo porro rectangula *B*NQD, *B*VPD facta ex latere *DB* in radios *BH*, DM circulorum *BC*, *DE* ſimul ſumta adæquant rectangulum *B*RXD, quod ſub diametro FG circuli intermedii, & ſub co-

(a) Lib. IX. §. 59.
(b) Lib. I. §. 76.
(c) Ibidem §. 128.
(d) §. 63.
(e) Lib. I. §. 141.
(f) §. 62.

Digitized by Google

eodem fruſti latere *DB* continetur (a). Ergo curva fruſti conici *B*DEC ſuperficies eſt ad ſuperficiem integri coni *BAC*, ut rectangulum *BX* ad rectangulum *BT* (b); adeoque ſuperficies &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XII.

Superficies fruſti coni recti adæquat circulum, cujus radius ſit media proportionalis inter diametrum circuli intermedii, & latus ipſius fruſti.

65. Diameter circuli intermedii in fruſto *B*DEC coni recti *B*AC ſit recta FG. Inter ipſam autem FG, & latus *DB* ipſius fruſti media proportionalis ſit radius *ab* circuli *ac*. Dico, curvam ſuperficiem fruſti conici *B*DEC æquare circulum *ac*. Fig. 8. Fig. 9. Tab. 12.

Demonſtratio.

Radius *de* circuli *df* ſit media proportionalis inter latus AD ſegmenti conici DAE, & radium DM baſis ejus; ſitque propterea curva ſuperficies coni DAE circulo *df* æqualis (c). Quoniam igitur radius *ab* eſt media proportionalis inter rectam FG, & latus *DB*, rectangulum RD ſub his rectis contentum ęquale erit quadrato *mb* (d); eandemque ob cauſam rectangulum quoque DS ſub latere AD, & ſub recta DP radio DM æquali comprehenſum æquabit quadratum *ne* radii *de*. Superficies autem fruſti conici *BDEC* eſt ad ſuperficiem coni *DAE*, ut rectangulum R*D* ad rectangulum *DS* (e). Ergo ſuperficies fruſti conici *BDEC* erit quoque ad ſuperficiem coni *DAE*, ut quadratum *mb* ad quadratum *ne*. Circulus porro *ac* eſt ad circulum *df*, ut quadratum *mb* ad quadratum *ne* (f). Ergo ſuperficies fruſti conici *BDEC* erit ad ſuperficiem coni *DAE*, ut circulus *ac* ad circulum *df* (g), Fig. 10. Tab. 12.

&

(a) §. 63.
(b) Lib. I. §. 102.
(c) §. 57.
(d) Lib. IX. §. 111.
(e) §. 63.
(f) Lib. IX. §. 118.
(g) Lib. I. §. 76.

Digitized by Google

& *alternando* ſuperficies fruſti conici *BDEC* erit ad circulum *ac*, ut ſuperficies coni *DAE* ad circulum *df* (a). Poſuimus autem, ſuperficiem coni *DAE* æquare circulum *df*. Ergo circulo quoque *ac* æqualis erit curva fruſti conici ſuperficies *BDEC* (b). Itaque ſuperficies &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XIII.

Superficies fruſti coni recti eſt ad cujuſvis recti cylindri ſuperficiem, ut rectangulum contentum ſub diametro circuli intermedii, & ſub latere ipſius fruſti ad rectangulum per axim cylindri.

Fig. 8. Fig. 5. Tab. 12. 66. Fruſtum coni recti ſit *BDEC*. Dico, illius ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem cylindri recti AC, ut rectangulum R*D* contentum ſub latere *DB*, & ſub recta *B*R, quæ ſit æqualis diametro FG circuli intermedii, ad rectangulum *ABCD* per axim ipſius cylindri.

Demonſtratio.

Fig. 9. Fig. 6. Tab. 12. Radius *ab* circuli *ac* ſit media proportionalis inter latera R*B*, *DB* rectanguli R*D*, & radius EF circuli EG ſit media proportionalis inter latus *AB*, & latus *BC* rectanguli AC; ſitque propterea ſuperficies fruſti conici *BDEC* æqualis circulo *ac* (c), & ſuperficies cylindri AC æqualis circulo EG (d). Ut ergo circulus *ac* ad circulum EG, ita erit ſuperficies fruſti conici *BDEC* ad ſuperficiem cylindri AC. Circulus autem *ac* eſt ad circulum EG, ut quadratum *mb* ad quadratum MF (e). Ergo ſuperficies quoque fruſti conici *BDEC* erit ad ſuperficiem cylindri AC, ut quadratum *mb* ad quadratum MF (f). Ut autem quadratum *mb* ad quadratum MF, ita rectangulum R*D* ad rectangulum *ABCD*; cum rectangulum

RD

(a) Ibidem §. 125.
(b) Ibidem §. 49.
(c) §. 65.
(d) §. 41.
(e) Lib. IX. §. 188.
(f) Lib. I. §. 77.

R*D* ſit æquale quadrato *nb*, & rectangulum *ABCD* quadrato MF (e). Ergo ſuperficies fruſti conici *BDEC* erit itidem ad ſuperficiem cylindricam AC, ut rectangulum R*D* ad rectangulum *ABCD* (f). Superficies itaque &c. quod erat oſtendendum.

LEMMA IV.

Omnes conicæ ſuperficies, quæ gignuntur a lateribus ſegmentum perimetri polygoni regularis conſtituentibus, atque circa perpendicularem ejusdem radium revolutis, adæquant ſimul ſumtæ curvam ſuperficiem cylindri recti producti a rectangulo, cujus altitudo, circa quam rotatur, eadem ſit cum altitudine ipſius ſegmenti, baſis vero ſit ejusdem polygoni catetus.

67. Eſto *ABCD* ſegmentum perimetri polygoni regularis, quod concipiatur revolui circa ejusdem radium AE chordæ *D*L perpendiculariter inſiſtentem. Sub eadem autem altitudine AE rotantis ſegmenti *ABCD*, & ſuper rectam EK, quæ ſit æqualis cateto ipſius polygoni, conſtituatur rectangulum HKEA, quod circa eandem altitudinem AE itidem revolvatur, integramque revolutionem compleat. *D*ico, omnes conicas ſuperficies, quæ in illa revolutione producuntur a lateribus AB, BC, C*D*, æquare ſimul ſumtas curvam ſuperficiem cylindri recti, qui a rotante rectangulo HKEA ſimul efficitur. Fig. 11. Tab. 12.

Demonſtratio.

Per puncta B, C ducantur rectæ G*c*, F*n* parallelæ lateribus HA, KE rectanguli HE, atque adeo ad rectos angulos lateri AE inſiſtentibus. Tum a centro E ad punctum B

(a) Lib. IX. §. 111. (b) Lib I. §. 77.

ducta recta EB, cum rectæ EA, EB ſint radii polygoni regularis, erunt inter ſe æquales (a), ac proinde triangulum BEA erit iſoſceles (b). Quamobrem, ſi ab eodem centro E in latus BA cadat catetus, ſive recta perpendicularis E*a*, hæc latus ipſum bifariam dividet (c). Rurſus quoniam triangulum E*a*A eſt rectangulum, demiſſa perpendiculari *ab*, triangulum E*ab* ſimile erit triangulo A*ab* (d). Triangulum autem AB*c* ſimile eſt triangulo A*ab* (e), ex eo nimirum quod recta *ab* ſit baſi B*c* parallela (f). Ergo triangulum E*ab* ſimile quoque erit triangulo AB*c* (g); habebuntque idcirco hujuſmodi triangula E*ab*, AB*c* latera circa æquales angulos E*ab*, BA*c* proportionalia, videlicet erit E*a*. *ab* = BA. A*c* (h). Poſitis autem quatuor rectis lineis proportionalibus, rectangulum extremarum adæquat rectangulum mediarum (i). Igitur, cum recta G*c* adæquet catetum E*a* (*k*), ex eo quod ſit G*c* = KE (l), & per hypotheſim KE = E*a*, rectangulum H*c* contentum ſub extremis E*a*, A*c* æquabit rectangulum *af* contentum ſub mediis *ab*, BA. Rectangulum porro B*h* contentum ſub recta B*c*, & ſub eadem BA duplum eſt rectanguli *af* (m); cum ſit B*c*. *ab* = AB. A*a* (n); adeoque B*c* = 2*ab*, quemadmodum per hypotheſim eſt BA = 2*a*A. Rectangulum quoque HN duplum eſt rectanguli H*c* (o), utpote ſuper duplam baſim, & ſub eadem altitudine conſtitutum. Ergo rectangula B*h*, HN erunt inter ſe æqualia (p). Manifeſtum porro eſt, rectangulum HN eſſe rectangulum per axim cylindri recti producti a rotante rectangulo HG*c*A; rectangulum vero B*h* comprehendi ſub latere AB, & ſub radio B*c* baſeos coni recti producti a rotante triangulo BA*c*. Ergo conica ſuperficies genita a latere AB erit ad cylindricam ſuperficiem productam a latere HG, ut

(a) Lib. IX. §. 19.
(b) Lib. V. §. 25.
(c) Ibidem §. 78.
(d) Lib. IX. §. 78.
(e) Ibidem §. 65.
(f) Lib. IV. §. 10.
(g) Lib. IX. §. 35.
(h) Ibidem §. 1.
(i) Ibidem §. 107.
(k) Syn. Alg §. 259.
(l) Lib. IV. §. 20.
(m) Lib. IX. §. 95.
(n) Ibidem §. 59.
(o) Lib. IX. §. 95.
(p) Lib. I. §. 103.

Digitized by Google

ut eſt rectangulum *Bh* ad rectangulum HN (a). Hujuſmodi autem rectangula oſtenſa ſunt æqualia. Igitur ipſæ quoque ſuperficies erunt inter ſe æquales (b).

Rurſus ducto ex centro E in latus BC catheto E*d*, qui latus ipſum biſariam dividet, ut de catheto E*a*, & de latere BA ſupra demonſtravimus; tum ex puncto medio *d* educta recta *dm* parallela utrique rectæ B*c*, C*n*, adeoque ad perpendiculum inſiſtente radio AE (c), nec non demiſſa ex puncto B in rectam C*n* recta B*e*, quæ ſit perpendicularis rectæ C*n*, ac proinde etiam rectæ G*c* (d), ſimulque parallela rectæ *cn* ob rectitudinem angulorum internorum *eBc*, *ncB* (e), quoniam anguli GB*e*, E*d*B æquales ſunt inter ſe (f), utpote recti (g), ſicuti etiam anguli alterni GB*d*, B*dm* (h), his ſublatis, erit reliquus CB*e* reliquo *md*E æqualis (i). Æquales ſunt autem etiam duo B*e*C, *dm*E (k), quod uterque ſit rectus (l). Ergo reliquus itidem BC*e* trianguli B*e*C reliquo *d*E*m* trianguli *dm*E æqualis erit (m); ac proinde duo hujuſmodi triangula erunt æquiangula; adeoque ſibi mutuo ſimilia (n), habebuntque latera circa æquales angulos CB*e*, E*dm* proportionalia (o), erit nempe E*d*. *dm* ∺ CB. B*e*, ſive E*d*. *dm* ∺ CB. *cn* (p), cum ſit B*e* ∺ *cn* (q). Rectangulum igitur GF*nc* extremarum E*d*, *cn* æquabit rectangulum *dy* mediarum *dm*, BC (r); atque adeo etiam rectangulum GM duplum rectanguli G*n* æquale erit rectangulo *dx* duplo rectanguli *dy* (s). Jam autem patet, rectangulum GM eſſe rectangulum per axim cylindri recti producti a rotante rectangulo G*n*, & rectangulum *dx* contineri ſub latere BC fruſti conici geniti a rotante trapezio *c*BC*n*, & ſub diametro *dx* circuli fruſtum ipſum conicum per medium dividen-

(a) §. 61.
(b) Lib. I. §. 45.
(c) Lib. III. §. 24.
(d) Lib. IV. §. 16.
(e) Ibidem §. 9.
(f) Lib. III. §. 37.
(g) Ibidem §. 23.
(h) Lib. IV. §. 15.
(i) Syn. Alg §. 266.
(k) Lib. III. §. 37.
(l) Ibidem §. 23.
(m) Lib V. §. 46.
(n) Lib. IX. §. 66.
(o) Ibidem §. 1.
(p) Lib. I. §. 112.
(q) Lib. VI. §. 20.
(r) Lib. IX. §. 107.
(s) Lib. I. §. 103.

tis. Ergo curva ſuperficies fruſti conici producta a latere BC erit ad ſuperficiem cylindri genitam a latere GF, ut eſt rectangulum *dx* ad rectangulum GM (a). Iſta autem rectangula ſunt inter ſe æqualia. Igitur illæ quoque ſuperficies erunt inter ſe æquales (b). Eodem modo oſtendam, ſuperficiem fruſti conici, quæ gignitur a latere C*D* æquare ſuperficiem cylindricam, quæ a latere FK producitur. Ergo omnes conicæ ſuperficies, quæ fiunt a lateribus AB, BC, *CD*, adæquant ſimul ſumtæ cylindricam ſuperficiem genitam a latere HK; ac proinde omnes ſuperficies conicæ &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XIV.

Curva hemiſphærii ſuperficies adæquat curvam ſuperficiem cylindri recti ſibi circumſcripti.

68. Hemiſphærio BAE circumſcriptus ſit rectus cylindrus BCFE. *D*ico, curvam hemiſphærii BAE ſuperficiem æquare curvam ſuperficiem cylindri *B*CFE.

Demonſtratio.

Cum enim circulus ſit polygonum regulare infinitorum Fig. 2. Tab. 11. laterum (c), arcus BMA quadrantis circuli BMA*D* ſpectari poteſt, veluti ſegmentum perimetri polygoni regularis; ac proinde veluti conſtans ex infinitis lateribus, ſive rectis lineis infinitæ parvæ magnitudinis. Curva autem hemiſphærii *BAE* ſuperficies oritur ab arcu *B*MA quadrantis *B*MA*D* rotantis circa immotum radium *AD* (d). *E*rgo curva hemiſphærii *BAE* ſuperficies compoſita erit ex infinitis ſuperficiebus conicis genitis in illa revolutione ab illis lateribus infinite parvis, quæ arcum *B*MA conſtituunt. Omnes autem hujuſmodi conicæ ſuperficies adæquant ſimul ſumtæ curvam ſu-

(a) §. 66.
(b) Lib. I. §. 45.
(c) Lib. IX. §. 149.
(d) Lib. XI. §. 60.

Digitized by Google

ſuperficiem circumſcripti cylindri BCF*E* (a), utpote genitam a latere C*B* rectanguli *ACBD*, cujus altitudo *AD*, circa quam rotatur, eadem eſt cum altitudine quadrantis genitoris *B*MA*D*, baſis vero *BD* eſt catetus polygoni, cujus perimetri una portio eſt arcus *B*MA. Ergo curva ſuperficies hemiſphærii *BAE* adæquat curvam ſuperficiem cylindri circumſcripti C*B*EF; adeoque curva &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Curva hemiſphærii ſuperficies eſt æqualis rectangulo ſub illius radio, & ſub peripheria circuli baſeos comprehenſo.

69. Videlicet curva ſuperficies hemiſphęrii *B*AE eſt ęqualis rectangulo contento ſub radio *DA*, & ſub peripheria circuli baſeos *BGE*. Etenim radius *AD* adęquat latus C*B* cylindri *BCEF* ipſi hemiſphęrio circumſcripti (b), idemque circulus *BE* eſt baſis utriuſque (c). Superficies autem cylindri *B*CFE, baſibus ſecluſis, eſt æqualis rectangulo contento ſub latere C*B*, & ſub peripheria baſeos *BGE* (d). Ergo, cum ſuperficies curva hemiſphærii *BAE* curvam cylindri *B*CF*E* ſuperficiem adæquet (e), eadem ipſa ſuperficies rectangulum ſub radio *AD*, & ſub peripheria baſeos *BGE* comprehenſum æquabit (f). Fig. 2. Tab. II.

COROLLARIUM II.

Curva ſuperficies hemiſphærii adæquat circulum, cujus radius ſit media proportionalis inter diametrum, & radium ipſius hemiſphærii.

70. Ut ſi inter diametrum *BE*, & radium *BD* hemiſphærii

RA*E*

(a) §. 67.
(b) §. 13.
(c) §. 11.
(d) § 26.
(e) § 68.
(f) Synop. Alg. §. 262.

Digitized by Google

BAE inveniatur media proportionalis, hæc erit radius circuli, cui curva ipſius hemiſphærii ſuperficies æqualis erit. Hunc enim circulum adæquat curva ſuperficies circumſcripti cylindri BCFE (a); cum latus hujus cylindri ab hemiſphærii radio, & diameter baſis ejusdem a diametro inſcripti hemiſphærii non differant (b).

Fig. 2. Tab. 12.

COROLLARIUM III.

Superficies ſphæræ adæquat curvam ſuperficiem cylindri ſibi circumſcripti.

71. Superficies nimirum ſphæræ ABHE adæquat curvam ſuperficiem circumſcripti cylindri CGKF. Ut enim ſuperficies totius ſphæræ ABHE eſt dupla curvæ ſuperficiei hemiſphærii BAE, ita curva ſuperficies cylindri CGKF toti ſphæræ circumſcripti eſt dupla curvæ ſuperficiei cylindri BCFE circumſcripti hemiſphærio BAE. Curva autem ſuperficies hemiſphærii BAE adæquat curvam ſuperficiem cylindri BCFE ſibi circumſcripti (c). Ergo ſuperficies quoque totius ſphæræ ABHE curvam ſuperficiem æquabit cylindri ſibi circumſcripti CGKF (d).

Fig. 12. Tab. 12.

COROLLARIUM IV.

Superficies ſphæræ eſt æqualis rectangulo contento ſub illius diametro, & ſub peripheria maximi in ea circuli.

72. Videlicet ſuperficies ſphæræ ABHE adæquat rectangulum contentum ſub diametro AH, & ſub peripheria circuli maximi BE. Cum enim circulus maximus BE adæquet circulum baſeos GK cylindri ipſi ſphæræ circumſcripti (e), & diameter AH ejusdem cylindri latus CG, rectangulo contento

Fig. 12. Tab. 12.

(a) §. 40.
(b) §. 11., 12.
(c) §. 68.
(d) Lib. I. §. 127.
(e) §. 11.

tento ſub diametro AH, & ſub peripheria circuli BE curva circumſcripti cylindri CGKF æqualis erit (a). Huic autem cylindricæ ſuperficiei eſt æqualis ſuperficies inſcriptæ ſphæræ ABHE (b). Ergo ſuperficies ſphęræ ABHE ipſum quoque rectangulum æquabit (c).

COROLLARIUM IV.

Superficies ſphæræ adæquat circulum, cujus radius ſit diameter ipſius ſphæræ.

73. Ut ſi ex diametro AH ſphæræ ABHE, veluti radio, circulus deſcribatur, ſuperficies ſphæræ ABHE erit ejuſmodi circulo æqualis. Hunc enim circulum adæquat curva ſuperficies circumſcripti cylindri CGKF (d), cui ipſa ſphæræ ſuperficies eſt æqualis (e). Ergo ſphærę quoque ABHE ſuperficies circulum ipſum æquabit. Fig. 11. Tab. 12.

SCHOLION.

74. Ex eo, quod ſuperficies ſphæræ adæquet circulum ex illius diametro, veluti radio, deſcriptum, manifeſtum efficitur, quod alibi aliter demonſtravimus, *ſphærarum* nempe *ſuperficies eſſe inter ſe in ratione duplicata ſuarum diametrorum*; cum hanc rationem habeant inter ſe circuli, qui ex earum ſphærarum diametris deſcribuntur, quoſque ſphæricæ ipſæ ſuperficies adęquant.

COROLLARIUM VI.

Superficies ſphæræ eſt quadrupla circuli in ea maximi.

75. Nimirum ſuperficies ſphærę ABHE eſt quadrupla circuli in ea maximi BE. Cum enim illius circuli quadrupla ſit Fig. 11. Tab. 12.

curva

(a) §. 16.
(b) §. 71.
(c) Syn. Alg. §. 162.
(d) §. 34.
(e) §. 71.

Digitized by Google

curva ſuperficies circumſcripti cylindri CGKF (a) quam inſcriptæ ſphæræ ABHE ſuperficies adæquat (b), ejusdem quoque circuli quadruplam eſſe ipſius ſphæræ ſuperficiem, conſectarium eſt (c).

SCHOLION.

76. Id porro ex eo etiam patet, quod circuli in ſphæra maximi quadruplus ſit circulus ex ſphæræ diametro, veluti radio, deſcriptus (d); cum hoc ipſo hujus radius ſit duplo major radio ipſius circuli maximi. Circulum autem deſcriptum ex ſphæræ diametro adæquat ejusdem ſphęræ ſuperficies (e). Ergo ſphærę quoque ſuperficies quadrupla erit circuli in ea maximi (f).

PROBLEMA VII.

Curvam ſuperficiem hemiſphærii determinare.

77. Determinare oporteat valorem curvæ ſuperficiei hemiſphęrii BAE.

Reſolutio.

Fig. 2. Tab. II. Invento valore peripheriæ circuli maximi BGE (g), valor hujuſmodi per valorem radii BD multiplicetur. Factum dabit valorem ſuperficiei quæſitum. Ut ſi peripheria maximi circuli BGE fuerit $= a$, & valor radii BD fuerit b; valor curvæ ſuperficiei hemiſphærii BAE erit $= ab$.

Demonſtratio.

Curva namque ſuperficies hemiſphærii BAE adæquat rectan-

(a) §. 32.
(b) §. 71.
(c) Lib. I. §. 102.
(d) Lib. IX. §. 185.
(e) §. 73.
(f) Lib. I. §. 102.
(g) Lib. X. §. 40.

Digitized by Google

ctangulum, cujus valor a producto *ab* exprimitur (a).

PROBLEMA VIII.

Invenire ſuperficiem ſphæræ.

Invenire oporteat valorem ſuperficiei ſphæricæ ABHE.

Reſolutio I.

Determinato valore peripheriæ circuli BE in ipſa ſphæra maximi (b), valor ipſe multiplicetur per diametrum ipſius ſphærę. Quod enim hinc fit productum, erit valor ſphæricæ ſuperficiei ABHE. Si nimirum peripheria circuli maximi B*E* fuerit = *a*, & diameter AH = *b*, ſuperficies ſphæræ ABH*E* erit *ab*. Fig. 12. Tab. 12.

Demonſtratio.

Factum quippe *ab* exprimit valorem rectanguli, cui ſphærica ipſa ſuperficies eſt ęqualis (c).

Reſolutio II.

Inveniatur valor maximi circuli ipſius ſphęræ (d); tum valor hujuſmodi per 4. multiplicetur. Factum dabit valorem ſuperficiei ſpæricæ quæſitum. Valor nempe ſuperficiei ABH*E* erit = *4ab*, ſi valor circuli in ea maximi fuerit = *ab*.

Demonſtratio.

Superficies ſiquidem ſphæræ eſt quadrupla circuli in illa maximi (e).

(a) §. 69.
(b) Lib. X. §. 40.
(c) §. 72.
(d) Lib. X. §. 52.
(e) §. 73.

THEOREMA XV.

Si eidem ſphæræ circumſcripti habeantur conus æquilaterus & cylindrus, ſuperficies coni ſumta ſimul cum baſeos circulo erit ad ſuperficiem cylindri una cum baſibus in ratione ſeſquialtera, ſicuti etiam ſuperficies cylindri una cum baſibus, ad ſuperficiem ſphæræ.

Sphæræ MEN circumſcripti habeantur conus æquilaterus BAC, & cylindrus FHKG.

I.

Fig. 3. Tab. 11. 79. Dico primo, ſuperficiem coni BAC ſumtam ſimul cum circulo baſeos BC, eſſe in ratione *ſeſquialtera* ad ſuperficiem cylindri FHKG una cum baſibus FG, HK.

Demonſtratio.

Quoniam conus eſt æquilaterus, illius ſectio BAC per axim erit triangulum æquilaterum (a); ac proinde recta, ſive axis AE, utpote baſi BC ad perpendiculum incumbens, angulum verticalem BAC bifariam divídet (b). Ducta igitur a centro D ad angulum B recta DB, cum radii DA, DB ſint æquales (c), anguli quoque DAB, DBA inter ſe æquales erunt (d). Duo autem anguli BAC, ABC æquales ſunt inter ſe (e). Ergo etiam duo anguli DBE, EAC æquales erunt (f); cumque angulus EAC angulum EAB adæquet, ut modo vidimus, angulus quoque DBE angulum BAE æquabit. In triangulis itaque rectangulis AEB, BED duo anguli BAE, DBE ſunt æquales. Communis autem utrique eſt angulus rectus AEB. Ergo reliquus angulus ABE unius reliquo

(a) Lib. XI. §. 99.
(b) Lib. V. §. 80.
(c) Lib. VII. §. 10.
(d) Lib. V. §. 60.
(e) Ibidem §. 62.
(f) Lib. I. §. 126.

Digitized by Google

reliquo angulo BDE alterius æqualis erit (a); duoque ipſa triangula erunt inter ſe mutuo æquiangula (b); adeoque ſimilia (c), habebuntque latera circa æquales angulos proportionalia, erit nempe BE. ED = AE. EB (d); ac proinde quadratum quoque lateris BE erit ad quadratum lateris ED, ut eſt quadratum lateris AE ad quadratum lateris EB (e). Manifeſtum porro eſt, quadratum lateris AE triplum eſſe quadrati lateris BE; cum quadratum lateris AB dupli lateris BE per hypotheſim ſit quadruplum quadrati ipſius lateris BE (f), & quadratum ejusdem lateris AB quadrata adæquet laterum AE, EB ſimul ſumta (g). Ergo quadratum quoque lateris BE triplum erit quadrati lateris DE. Porro circuli ſunt inter ſe, ut quadrata ſuorum radiorum (h). Ergo circulus deſcriptus ex latere EB, ſive circulus baſeos coni BAC, erit triplus circuli lateris DE, videlicet circuli in ſphæra maximi MEN. Curva autem coni BAC ſuperficies eſt ad circulum baſeos, ut latus AB ad radium BE baſis BC (i); adeoque in ratione dupla. Ergo curva coni BAC ſuperficies erit ad maximum inſcriptæ ſphæræ circulum MEN, ut 6 ad 1; atque adeo ipſa eadem curva ſuperficies coni, ſumta ſimul cum ejusdem baſi BC, erit ad circulum maximum inſcriptæ ſphæræ MEN, ut 9 ad 1. Conſtat autem, curvam ſuperficiem cylindri FHKG eſſe ad circulum maximum MEN ejusdem ſphæræ ſibi inſcriptæ, ut 4. ad 1 (k); adeoque ſuperficiem ipſam curvam cylindri una cum ejus baſibus eſſe ad maximum ſphæræ circulum MEN, ut 6 ad 1; cum circulus baſis adæquet circulum maximum ſphæræ ipſi cylindro inſcriptæ (l). Ergo curva ſuperficies coni BAC una cum circulo baſeos BC erit ad curvam ſuperficiem cylindri FHKG ſumtam ſimul baſibus HK, FG, ut 9 ad 6, in ratione nimirum *ſeſquialtera*.

(a) Lib. V. §. 46.
(b) Ibidem §. 19.
(c) Lib. IX. §. 60.
(d) Ibidem §. 1.
(e) Lib. I. §. 187.
(f) Lib. IX. §. 172.
(g) Lib. VI. §. 37.
(h) Lib. IX. §. 188.
(i) §. 52.
(k) §. 32.
(l) §. 8.

I I.

80. Dico 2, ſuperficiem cylindri FHKG una cum baſibus HK, FG eſſe in ratione quoque *ſeſquialtera* ad ſuperficiem ſphæræ ſibi inſcriptæ MEN.

Demonſtratio.

Enimvero, quoniam curva ſuperficies cylindri FHKG eſt quadrupla circuli ſuæ baſis HK (a), ſuperficies ipſa ſumta ſimul cum baſibus HK, FG erit ad ſeipſam, baſibus ſeclu- ſis, ut 6 ad 4. Superficies autem inſcriptæ ſphæræ MEM adæquat curvam ſuperficiem cylindri FHKG (b). Ergo curva ſuperficies ipſius cylindri una cum baſibus erit quoque ad ſuperficiem inſcriptæ ſibi ſphæræ, ut 6 ad 4, nempe in ratione *ſeſquialtera*. Itaque ſi eidem ſphæræ &c. quod erat oſtendeudum.

Arch. de ſph l. 1. p. 32

THEOREMA XVI.

Curva ſuperficies ſegmenti ſphærici adæquat curvam ſuperficiem cylindri recti geniti a rectangulo, cujus altitudo eadem ſit cum altitudine ſegmenti ſphærici, baſis vero ſit radius ſphæræ, cujus ipſum ſegmentum eſt portio.

81. Sit ABC ſegmentum ſphæricum genitum ex revolutione arcus AB circa radium BE. Dico, curvam illius ſuperficiem ABC æquare curvam ſuperficiem cylindri recti KHML producti a rectangulo KHDB, cujus altitudo BD eadem ſit cum altitudine ipſius ſegmenti, baſis vero HD ſit æqualis radio BE ſphæræ, cujus ſegmentum ipſum ſphæricum ABC eſt una portio.

Fig 13. Tab. 12.

De-

(a) §. 51. (b) §. 71.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum demonſtratione Theor. XIV. hujus. Curva enim ſuperficies ſphærici ſegmenti ABC conſurgit ex infinitis conicis ſuperficiebus productis ab infinitis illis lateribus, quæ arcum genitorem AB conſtituunt. Omnes autem hujuſmodi conicæ ſuperficies ſimul ſumtæ adæquant curvam ſuperficiem cylindri geniti a rectangulo KHDB. Ergo &c. Itaque curva ſuperficies &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM

Curva ſuperficies ſegmenti ſphęrici eſt æqualis rectangulo comprehenſo ſub recta, quæ ſit æqualis peripheriæ maximi circuli ſphæræ, cujus ipſum ſegmentum eſt portio, & ſub ea parte radii, quæ eſt ipſius ſegmenti altitudo.

82. Curva nimirum ſuperficies ſegmenti ſphærici ABC adæquat rectangulum contentum ſub recta, quæ ſit æqualis peripherię maximi circuli ſphæræ AFNG, & ſub altitudine BD ipſius ſegmenti. Ejuſmodi ſiquidem rectangulo ę-qualis eſt curva ſuperficies cylindri geniti ex revolutione rectanguli KHDB circa idem axis ſegmentum BD (a); cum propter hypotheſim hujuſce cylindri baſis ſit circulus maximus ipſius ſphæræ BFNG. Curva autem ſuperficies ſegmenti ſphærici ABC adæquat curvam ſuperficiem cylindri geniti ex revolutione rectanguli KHDB (b). Ergo hæc ipſa quoque ſegmenti ſphærici ſuperficies rectangulum illud ęquabit (c). Fig. 13. Tab. 12.

PRO-

(a) §. 28.
(b) §. 81.
(c) Syn. Algeb. §. 261.

PROBLEMA IX.

Curvam ſuperficiem ſegmenti ſphærici invenire.

83. Determinare oporteat curvam ſuperficiem ſegmenti ſphærici ABC.

Reſolutio.

Fig. 11. Tab 12. Inveniatur valor peripheriæ maximi circuli ſphæræ *BFNG*, cujus ipſum ſegmentum eſt una portio (a). Tum valor ille per valorem axis AD ipſius ſegmenti multiplicetur. Factum erit valor curvæ ſuperficiei quæſitus. Ut ſi peripheria maximi circuli fuerit $= a$, & axis ſegmentum AD fuerit $= b$, curva ſuperficies ſegmenti ſphærici *ABC* erit $= ab$.

Demonſtratio.

Quandoquidem factum *ab* eſt valor rectanguli, cui curva ſuperficies ſegmenti ſphærici *ABC* eſt æqualis (b).

THEOREMA XVII.

Curva ſegmenti ſphærici ſuperficies eſt æqualis circulo, cujus radius ſit chorda arcus genitoris.

84. In ſphæra *BFGN* ſpectetur ſegmentum *ABC* genitum Arch. de ſph. l. 1. p. 40, 41 ex revolutione arcus *BA* circa quieſcentem diametrum *BN*. Dico, curvam ſuperficiem ſegmenti *ABC* æquare circulum, cujus radius ſit chorda *BA* ipſius arcus genitoris *AB*.

Demonſtratio.

Sub eodem ſegmento *BD* axis, & ſub recta HD, quæ ſphæ-

(a) Lib. X. §. 40. (b) §. 12.

Digitized by Google

ſphæræ radio ſit æqualis conſtituatur rectangulum *KHDB* , atque a puncto *A* ad extremum *N* diametri *BN* ducatur recta *AN*. Quoniam igitur angulus *BAN*, utpote in ſemicirculo conſiſtens, eſt rectus (a), triangulum *BAN* erit rectangulum (b), cumque per hypotheſim recta *AD* ſit lateri *BN* perpendicularis, chorda *BA* erit media proportionalis inter diametrum *BN* , ejuſque ſegmentum *BD* (c) ; ac proinde etiam inter diametrum HM baſeos cylindri geniti ex revolutione rectanguli *KD*, & inter ejuſdem latus *KH*; cum per hypotheſim ſit *HD*=*BE*, adeoque 2*HD*=2*BE*, ſive *HM*=*BN*, & *KH*=*BD*. Igitur curva ſuperficies cylindri *KHML* æqualis erit circulo, cujus radius ſit recta *AB* (d). Curva autem ſuperficies ſegmenti ſphærici *ABC* adęquat curvam ſuperficiem cylindri *KHML* (e). Ergo curva ſuperficies ſegmenti ſphærici *ABC* circulum quoque æquabit, cujus radius ſit chorda *AB* (f). Itaque curva &c. quod erat oſtendendum. Fig. 11. Tab. 12.

THEOREMA XVIII.

Segmenta ſphæricæ ſuperficiei parallelis circulis diviſæ ſunt directe inter ſe, ut ſegmenta axis.

85. Sphæra *BFNG* ſecetur circulis parallelis *AC*, *FG*. Dico, curvam ſuperficiem genitam ex revolutione arcus *AF* eſſe ad curvam ſuperficiem genitam ex revolutione arcus *AB* circa eundem axim *BN*, ut eſt ſegmentum RD axis ad ejuſdem ſegmentum *DB*.

Demonſtratio.

Quoniam circuli, qui ſphæram dividunt, ſunt paralleli, eorum quoque diametri in eodem plano exiſtentes AC, FG erunt parallelæ (g); cumque ſphæræ axis *BN* ipſis circulis ad perpendiculum incumbat, diametris quoque *AC* , *FG* erit per- Fig. 13. Tab. 12.

(a) Lib. VII §. 75.
(b) Lib. V. §. 19.
(c) Lib. XI. § 74.
(d) §. 41.
(e) §. 81.
(f) Syn. Algeb. §. 261.
(g) Lib. VIII. §. 16.

Digitized by Google

perpendicularis (a). Itaque cum ſegmentum ſuperficiei ſphęricæ genitum ex revolutione arcus *BA* ſit ęquale circulo ex chorda *AB*, & ſegmentum ſphæricæ ſuperficiei genitum ex revolutione arcus *FAB* adæquet circulum ex chorda *BF* (b), ſegmentum ſuperficiei ſphæricæ genitum ex revolutione arcus *FAB* erit ad ſegmentum ejuſdem ſuperficiei genitum ex revolutione arcus *AB*, ut circulus ex chorda *BF* ad circulum ex chorda *AB*; ac proinde ut quadratum chordæ *BF* ad quadratum chordæ *AB* (c). Quadratum autem chordæ *BF* adæquat rectangulum *KQ* contentum ſub recta *KL* æquali diametro *CN*, & ſub recta *KP* æquali ſegmento *BR* axis *BN*, & quadratum chordæ, *AB* adæquat rectangulum *KM*, quod ſub eadem recta *KL*, & ſub recta *KH* æquali ſegmento *BD* ejuſdem axis continetur (d); cum recta BF ſit media proportionalis inter totam *BN*, & partem *BR*, ſicuti etiam recta *BA* inter totam *BN*, & partem *BD* (e); quod anguli *BFN*, *BAN* triangulorum BFN, BAN ſint recti (f), & rectæ FR, AD ad perpendiculum axi BN inſiſtant. Ergo ſegmentum ſuperficiei ſphæricæ genitum ex revolutione arcus BF erit quoque ad ejuſdem ſuperficiei ſegmentum genitum ex revolutione arcus BA, ut rectangulum KQ ad rectangulum KM (g); ac proinde *dividendo*, ſegmentum ſuperficiei ſphæricæ genitum ex revolutione arcus FA erit ad ſegmentum ejuſdem ſuperficiei genitum ex revolutione arcus AB, ut rectangulum HQ ad rectangulum KM (h). Rectangulum porro HQ eſt ad rectangulum KM, ut HP ad HK, ſive ut DR ad DB (i). Ergo, ut DR ad DB, erit quoque ſegmentum ſphæricæ ſuperficiei genitum ex revolutione arcus AF ad ejuſdem ſegmentum ex revolune arcus AB (k). Itaque ſegmenta &c. quod erat oſtendendum.

PRO-

(a) Lib. VIII. §. 2.
(b) §. 84.
(c) Lib IX. §. 188.
(d) Ibidem §. 111.
(e) Ibibem §. 74.
(f) Lib. VII. §. 75.
(g) Lib. I. §. 76.
(h) Ibidem §. 115.
(i) Lib. IX. §. 100.
(k) Lib. I. §. [illegible]

PROBLEMA X.

Polyedri regularis ſuperficiem dimetiri.

86. Dimetiri oporteat ſuperficiem *octaedri*.

Reſolutio.

Inveniatur valor unius ex illis octo triangulis æqualibus, quibus *octaedrum* clauditur (a), atque hujuſmodi valor per 8, ſcilicet per numerum omnium planorum polyedrum ipſum terminantium multiplicetur. Factum erit ſuperficies quæſita.

Demonſtratio.

Superficies enim *octaedri* ex octo triangulis æqualibus ſimul ſumtis conſurgit.

PROBLEMA XI.

Superficiem polyedri irregularis determinare.

Reſolutio.

87. Inveniatur area omnium planorum, quibus polyedrum terminatur (b); tum ex hiſce omnibus valoribus fiat ſumma, quæ erit valor totius ſuperficiei quæſitus.

Demonſtratio.

Omnes enim partes cujuſvis totius ſimul ſumtæ ipſum totum adæquant.

(a) Lib. X. §. 25. (b) Ibidem §. 28.

THEOREMA XIX.

Soliditas cujusvis priſmatis adæquat factum ex multiplicatione baſeos per altitudinem.

Fig. 14. Tab. 12. 88. Eſto priſma AB, cujus altitudo ſit recta EF. Dico, illius ſoliditatem æquare valorem producti, quod emergit multiplicando illius baſim DCB per altitudinem EF.

Demonſtratio.

Patet ex geneſi ipſius priſmatis (a).

PROBLEMA XII.

Soliditatem priſmatis cujuſcunque invenire.

89. Determinare oporteat ſoliditatem priſmatis AB.

Reſolutio.

Valor baſis DCB multiplicetur per altitudinem EF: Factum dabit valorem totius priſmatis AB. Ut ſi baſis DCB fuerit $= ab$, & altitudo EF $= d$, ſoliditas ipſius priſmatis erit $= abd$.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex §. 88.

SCHOLION I.

90. Pro determinanda ſoliditate cubi, ſatis eſt, ut invento valore unius ex illis quadratis, quibus cubus ipſe clau-

(a) Lib. XI. §. 80.

clauditur; valor ille per valorem lateris multiplicetur: Patet ex ipſa natura cubi.

SCHOLION II.

91. Quoniam cylindrus eſt ſpecies priſmatis (a); habebitur ſoliditas dati cylindri, ſi illius baſis per altitudinem multiplicetur.

THEOREMA XX.

Omnis pyramis adæquat priſma ejuſdem baſis, & ſubtriple altitudinis.

92. Eſto pyramis quæcunque *debc*, cujus baſis ſit planum *dcb*, & altitudo recta *ef*. Super eandem autem baſim, & ſub tertia parte *nf* altitudinis *ef* conſtitutum habeatur priſma *mdb*. Dico, pyramidem *debc* æquare priſma *mdb*. Fig. 15. Tab. 12.

Demonſtratio.

Super baſim DCB æqualem baſi *dcb*, & ſub altitudine EF altitudini *ef* æquali conſtitutum ſit priſma AB. Quoniam igitur duo priſmata AB, *mb* habent æquales baſes DCB, *dcb*, priſma AB erit ad priſma *mb*, ut altitudo EF ad altitudinem *ef* (b), adeoque in ratione *tripla*. Eſt autem priſma AB in hac eadem quoque ratione ad pyramidem *debc* (c). Ergo pyramis *debc*, & priſma *mb* ſunt duo ſolida æqualia (d). Omnis itaque pyramis &c. quod erat oſtendendum. Fig. 14.

(a) Lib. XI. §. 70.
(b) Lib. XIII. §. 46.
(c) Ibidem §. 29.
(d) Lib. I. §. 113.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Omnis pyramis adæquat priſma ſubtriplæ baſis, & ejuſdem altitudinis.

93. Ut ſi baſis DCB priſmatis AB fuerit *tertia pars* baſis *dcb* pyramidis *debc*, altitudo vero EF altitudini *ef* æqualis, pyramis *debc* æquabit priſma AB. Hac enim facta hypotheſi, priſma AB eſt æquale priſmati *mb* (a), cui pyramis ipſa *debc* eſt æqualis; cum duo priſmata AB, *mb* reciprocent hoc ipſo ſibi mutuo baſes, & altitudines.

COROLLARIUM II.

Omnis conus adæquat cylindrum ejuſdem baſis, & ſubtriplæ altitudinis, necnon cylindrum ſubtriplæ baſis, & ejuſdem altitudinis.

94. Omnis enim conus eſt pyramis infinitangula (b), & omnis cylindrus eſt priſma infinitis parallelogrammis comprehenſum (c).

PROBLEMA XIII.

Pyramidis ſoliditatem invenire.

95. Determinare oporteat ſoliditatem pyramidis *deb*.

Reſolutio.

Inveniatur valor baſis *dcb* (d), iſque per tertiam partem altitudinis *ef* multiplicetur. Productum, quod hinc emergit, erit valor pyramidis *deb* quæſitus. Ut ſi basſis *dcb* fuerit

(a) Lib. XIII. §. 59.
(b) Lib. XI. §. 72.
(c) Ibidem §. 70
(d) Lib. X. §. 21.

rit $= mn$, & tertia pars altitudinis *ef* fuerit $= p$, ſoliditas pyramidis *deb* erit $= mnp$.

Demonſtratio.

Patet ex §. 93.

SCHOLION I.

96. Cum pyramis ſit tertia pars priſmatis ejuſdem baſis, & altitudinis (a), & priſmatis ſoliditas ſit factum ex ductu baſis in altitudinem (b), habebitur ſoliditas pyramidis, ſi multiplicata baſi per altitudinem, factum per 3. dividatur. Soliditas nimirum pyramidis erit $= \frac{mnx}{3}$ ſi ſi baſis fuerit $= mn$, & altitudo $= x$.

SCHOLION II.

97. Quod modo diximus de dimenſione pyramidis, intelligendum eſt etiam de dimenſione coni. Habebitur nempe ſoliditas coni, ſi illius baſis multiplicetur per tertiam partem altitudinis, vel factum ex ductu baſis in totam altitudinem per 3. dividatur. Patet ex §§. 94, 95.

PROBLEMA XIV.

Invenire ſoliditatem polyedri irregularis.

98. Eſto polyedrum irregulare ACE. Determinare oporteat illius ſoliditatem. Fig. 7. Tab. 9.

Reſolutio.

Facta reſolutione polyedri in pyramides (c), ſingularum valor

(a) Lib. XIII §. 29.
(b) §. 11.
(c) Lib XI. §. 115.

valor inquiratur (a). Tum fiat omnium ſumma; quæ erit valor ipſius polyedri quæſitus.

Demonſtratio.

Omnes enim partes cujuſvis totius ſimul ſumtæ, adæquant ipſum totum (b).

THEOREMA XXI.

Polyedrum regulare adæquat priſma, cujus baſis ſit æqualis ſuperficiei ipſius polyedri, altitudo vero tertiam cateti partem adæquet.

Fig. 7. Tab. 9. 99. Eſto polyedrum regulare ACE, cujus centrum ſit Z, & catetus ZN. Dico, polyedrum ACE æquare priſma, cujus baſis ſit æqualis ſuperficiei ipſius polyedri, altitudo vero ſit tertia pars cateti ZN.

Demonſtratio.

Cum polyedrum ACE reſolvi poſſit in tot pyramides omnino inter ſe æquales, quot ſunt plana ipſum terminantia (c), atque omnia hujuſmodi plana ſint inter ſe æqualia (d); tam multiplex pyramidis MZAF erit ipſum polyedrum ACE, quam multiplex plani AMF eſt tota ipſius polyedri ſuperficies (e), ac proinde polyedrum ACE erit ad pyramidem MZAF, ut eſt tota ſuperficies ipſius polyedri ad planum AMF. Ut autem integra polyedri ſuperficies ad planum AMF, ita eſt priſma, cujus baſis ſit æqualis ſuperficiei ipſius polyedri, altitudo vero tertiam partem cateti ZN adæquet, ad priſma, cujus baſis ſit planum AMF, & eadem altitudo (f). Ergo polyedrum ACE eſt ad pyramidem

(a) §. 95.
(b) Synop. Alg. §. 256.
(c) Lib. XIII. §. 94.
(d) Lib. XI. §. 10.
(e) Lib. I. §. 20.
(f) Lib. XIII. §. 40.

midem MZAF, ut priſma, cujus baſis ſit tota ſuperficies ipſius polyedri, & altitudo ſit tertia pars cateti ZN, ad priſma ejuſdem altitudinis, cujus baſis ſit planum AMF (a). Conſtat autem, pyramidem MZAF æquare priſma, cujus baſis ſit planum AMF, & altitudo ſit tertia pars cateti ZN (b); cum altitudo pyramidis MZAF ab ipſo cateto ZN non differat (c). Ergo polyedrum quoque ACE æquabit priſma, cujus baſis ſit tota ipſius polyedri ſuperficies, altitudo vero tertia pars cateti ZN (d). Itaque polyedrum &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Polyedrum regulare adæquat priſma, cujus baſis ſit tertia pars ſuperficiei ipſius polyedri, altitudo vero ejuſdem catetus.

100. Hujuſmodi ſiquidem priſma eſt illi æquale, cujus baſis eſt tota polyedri ſuperficies, altitudo vero tertia pars cateti (e); cum ſcilicet duo iſta priſmata reciprocent hoc ipſo ſibi mutuo baſes, & altitudines.

COROLLARIUM II.

Sphæra adæquat priſma, cujus baſis ſit æqualis ſuperficiei ipſius ſphæræ, altitudo vero ſit tertia pars radii, vel cujus baſis ſit tertia pars ſuperficiei, altitudo vero ejuſdem ſphæræ radius.

101. Sphæra namque eſt polyedrum regulare infinitis planis comprehenſum (f); cujus catetus non differt ab ejuſdem radio (g).

PRO-

(a) Lib. I. §. 78.
(b) §. 92.
(c) Lib. XIII. §. 24.
(d) Lib. I. §. 128.
(e) Lib. XIII. §. 80.
(f) Lib. XIII. §. 117.
(g) Ibidem §. 118.

PROBLEMA XV.

Soliditatem polyedri regularis dimetiri.

102. Dimetiri oporteat ſoliditatem polyedri regularis ACE, cujus catetus ſit recta ZN.

Reſolutio.

Inventa ſuperficie (a), ipſius valor per catetum ZN mul-
Fig. 7. Tab. 9. tiplicetur, & factum per 3. dividatur. Quotus erit ſoliditas quæſita. Ut ſi ſuperficies polyedri ACE fuerit $= mn$, & catetus ZN $= d$, ſoliditas ipſius polyedri erit $\frac{mnd}{3}$.

Demonſtratio.

Quantitas enim $\frac{mnd}{3}$ eſt valor priſmatis, cui polyedrum ipſum eſt æquale (b).

THEOREMA XXII.

Sphæra eſt æqualis cono recto, cujus baſis adæquat integram ſuperficiem ſphæræ, altitudo vero, ſive axis ſit ejuſdem ſphæræ radius.

103. Sit ſphæra ABEC, atque conus rectus KDM, cujus baſis KLM ſit æqualis integræ ſuperficiei ipſius ſphęrę ABEC, altitudo vero, ſive axis DE ſit ipſius ſphæræ radius. Dico, ſphæram ABEC eſſe æqualem cono KDM.

De-

(a) §. 86.
(b) §. 99.

Demonſtratio.

Soliditas ſphæræ ABEC conſurgit ex tot ſphæricis ſuperficiebus ſibi concentricis, quot puncta, centro excepto, ſunt in radio DE (a). Soliditas vero coni KDM componitur ex tot circulis baſeos circulo KLM parallelis, quot puncta in axe, ſive in eodem radio DE numerantur (b). Ergo tot ſunt elementa ſphęrę ABEC, quot ſunt elementa coni KDM. Fig. 16. Tab. 12.
Elementa autem ſphæræ ABEC ſunt æqualia elementis coni KDM, alterum alteri, quæ nimirum ſunt in eadem diſtantia a centro, ſeu vertice D. Spectetur namque ſphærica elementaris ſuperficies NFP, & circulus elementaris GEH. Cum igitur ſphęrica ſuperficies ABEC ſit ad ſuperficiem ſphęricam NFP (c), & circulus KLM ad circulum GEH, in ratione *duplicata* radii DE ad radium DF (d), ſphærica ſuperficies ABEC erit ad ſphæricam ſuperficiem NFP, ut circulus KLM ad circulum GH (e). Poſuimus autem, ſuperficiem ſphæricam ABEC æqualem eſſe circulo KLM. Ergo ſphærica quoque ſuperficies NFP æqualis erit circulo GEH (f). Eodem modo oſtendam, quamlibet ſuperficiem ſphęricam conſtituentem ſoliditatem ſphęrę ABEC æqualem eſſe circulo conſtituenti ſoliditatem coni KDM, ſi utrumque elementum in eadem a centro D diſtantia ſumatur. Elementa igitur ſphęrę ABEC ſunt magnitudine ęqualia elementis coni KDM. Demonſtravimus autem, ea eſſe etiam numero ęqualia. Ergo ſphęra ABEC adęquat conum KDM (g); ac proinde ſphęra &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Sphæra eſt æqualis cono recto, cujus circulus baſeos deſcriptus ſit ex diametro ſphæræ, veluti radio, axis vero ſit ejuſdem ſphęræ radius.

104. Sphęra nimirum ABEC æquabit conum rectum KDM, cujus

(a) Lib. XI. §. 48.
(b) Ibidem §. 92.
(c) Lib. XIII. §. 122.
(d) Lib. XI. §. 102.
(e) Lib. I. §. 76.
(f) Lib. I. §. 128.
(g) Lib. IX. §. 53.

Digitized by Google

Fig. 16. Tab. 12. cujus axis eſt ipſiuſmet ſphæræ radius DE, ſi radius circuli baſeos KLM fuerit diametro ipſius ſphæræ æqualis. Hoc enim ipſo baſis ipſius coni ſuperficiem ſphæræ adæquat (a).

COROLLARIUM II.

Sphæra eſt æqualis cono recto, cujus baſis ſit maximus ipſius ſphæræ circulus, axis vero ſit duplo major diametro ipſius ſphæræ.

105. Ut ſi baſis coni recti fuerit æqualis circulo maximo ſphæræ ABEC, & illius axis fuerit duplo major diametro ipſius ſphæræ, atque adeo quadruplus radii DE ejuſdem, conus iſte ſphęram ipſam æquabit. Enimvero hujuſmodi conus adæquat conum KDML (b), cui ſphæra ipſa ABEC eſt æqualis, quatenus nempe horum conorum baſes ſunt hoc ipſo in ratione *reciproca* altitudinum. Circulus namque ſphæræ maximus eſt in ratione *ſubquadrupla* ad circulum baſeos KLM coni KDML (c), quemadmodum axis DE ipſius coni KDML eſt in ratione *ſubquadrupla* ad axim, qui ſit duplo major diametro ipſius ſphæræ ABEC.

COROLLARIUM III.

Sphęra eſt æqualis cylindro recto, cujus baſeos radius ſit ipſius ſphæræ diameter, axis vero, ſive latus, ſeu altitudo ſit tertia pars radii ejuſdem ſphæræ.

106. Hujuſmodi namque cylindro æqualis eſt conus rectus, cujus baſeos radius ſit diameter ſphæræ, altitudo vero, ſive axis ſit ejuſdem ſphæræ radius (d). Hunc autem conum rectum adæquat ipſa ſphæra (e). Ergo illi quoque cylindro ipſa eadem ſphæra æqualis erit (f). Hinc

CO-

(a) §. 73.
(b) Lib. XIII. §. 61.
(c) Lib. IX §. 185.

(d) §. 94.
(e) §. 104.
(f) Syn. Algeb. §. 262.

COROLLARIUM IV.

Sphæra eſt æqualis cylindro recto, cujus baſeos circulus adæquet ſuperficiem ipſius ſphæræ, axis vero ſive altitudo ſit tertia pars radii ejuſdem ſphæræ.

107. Quandoquidem hujuſmodi cylindrus non eſt diverſus a cylindro recto, cujus baſeos radius ſit ſphæræ diameter; cum circulus, cujus radius ſit ſphæræ diameter, ſuperficiem ipſius ſphæræ adæquet (a).

COROLLARIUM V.

Sphæra eſt ęqualis cylindro recto, cujus baſis ſit maximus ipſius ſphærę circulus, axis vero, ſive altitudo quatuor trientes radii, ſeu duas tertias partes diametri ipſius ſphærę contineat.

108. Videlicet ſphæra ABCD adæquat cylindrum rectum DBLM, cujus baſis LM ſit maximus ipſius ſphæræ circulus, axis vero, ſive altitudo EC quatuor trientes radii XC, ſive duas tertias partes diametri AC comprehendat. Conſtituto namque cono recto KHEG, cujus baſis EG ſit circulus deſcriptus ex diametro AC ipſius ſphæræ, axis vero *aC* ſit tertia pars radii XC, ſive quarta pars axis EC cylindri BLMD, quoniam baſis cylindri HEGK quadrupla eſt baſis cylindri BLMD, duo cylindri BLMD, HEGK, utpote reciprocantes ſibi mutuo baſes, & altitudines, erunt inter ſe æquales (b). Sphæra autem ABCD adæquat cylindrum HEGK (c). Ergo cylindrum quoque æquabit BLMD. Fig. 17. Tab. 12.

(a) §. 73.
(b) Lib. XIII. §. 62.
(c). §. 106.

PROBLEMA XVI.

Sphæræ ſoliditatem dimetiri.

109. Eſto ſphæra ABCD, cujus ſoliditatem dimetiri oporteat.

Reſolutio I.

Inveniatur area circuli ex ſphæræ diametro AC, veluti ex radio, deſcripti (a), atque hujuſmodi valor per tertiam
Fig 17. ab 12. radii XC ipſius ſphęrę partem multiplicetur. Factum erit ſoliditas ſphærę quæſita. Ut ſi area circuli deſcripti ex ſphæræ diametro AC fuerit $= ab$, & radius XC fuerit $= d$, ſoliditas ſphærę ABCD erit $= \frac{abd}{3}$.

Demonſtratio.

Etenim factum $\frac{abd}{3}$ exprimit valorem cylindri recti, cujus baſis eſt circulus ex ſphæræ diametro AC deſcriptus, altitudo vero, ſive axis eſt tertia pars radii XC. Hujuſmodi autem cylindro æqualis eſt ſphæra (b). Ergo factum $\frac{abd}{3}$ ſoliditatem quoque ipſius ſphæræ determinabit.

Reſolutio II.

Inveniatur area circuli in ipſa ſphæra maximi, ejuſque valor per duas tertias partes diametri AC multiplicetur. Quod

(a) Lib. X. §. 28.
(b) §. 10.

Quod enim hinc emergit productum, erit ſoliditas ipſius ſphærę ABCD. Ut ſi valor maximi in ipſa ſphæra circuli fuerit = *mn*, & duæ tertiæ partes diametri AC fuerint = *r*, ſoliditas ſphæræ ABCD erit *mnr*.

Demonſtratio.

Factum quippe *mnr* exprimit valorem cylindri recti, cui ipſa ſphæra eſt æqualis (a).

THEOREMA XXIII.

Si eidem ſphærę conus æquilaterus, & cylindrus circumſcripti habeantur, conus erit ad cylindrum quoad ſoliditatem in ratione ſeſquialtera, ſicuti etiam cylindrus ad ſphæram.

Sphærę MEN circumſcripti habeantur conus ęquilaterus ABC, & cylindrus FHKG.

I.

110. Dico primo, cylindrum FHKG eſſe ad ſphæram MEN in ratione *ſeſquialtera*. Fig. 11. Tab. 12.

Demonſtratio.

Etenim cylindrus FHKG eſt ad cylindrum PHKR, cujus eadem ſit baſis, nempe maximus inſcriptæ ſphæræ circulus HK, altitudo vero, ſive axis *b*E duas tertias partes contineat axis *d*E, ſive diametri ejuſdem ſphæræ, ut axis *d*E ad axim *b*E (b), nimirum ut 3 ad 2. Cylindro autem PHKR æqualis eſt ſphæra MEN (c). Ergo cylindrus FHKG erit quo- Arch. l. 1. de ſph. p. 12

(a) §. 101.
(b) Lib. XIII. §. 49
(c) §. 108.

quoque ad inſcriptam ſibi ſphæram MEN, eſt 3 ad 2, videlicet in ratione *ſequialtera*.

I I.

111. Dico 2, conum ABC eſſe ad cylindrum FHKG in eadem quoque ratione *ſequialtera*.

Demonſtratio

Diametro BC baſeos coni hinc inde in directum producta, ponatur tam recta ES, quam recta ET æqualis axi, ſive diametro dE ſphæræ inſcriptæ, atque a centro a ducantur rectæ aS, aB, aC, aT, quæ ſpectentur veluti latera conorum rectorum SaT, BaC habentium pro axe radium ſphæræ aE. Quoniam itaque, ut ſuperiori loco demonſtravimus, nimirum §. 79., propter ſimilitudinem triangulorum AEB, BEa, latus AE eſt ad latus EB, ut eſt EB ad latus, ſive ad ſphęrę radium aE, latus AE erit ad latus, ſive ad radium aE, ut eſt quadratum ipſius AE ad quadratum mediæ proportionalis EB (a). Loco autem citato oſtenſum quoque eſt, quadratum lateris AE eſſe triplum quadrati lateris EB. Ergo recta, ſive axis AE coni erit tripla radii aE; ac proinde conus BAC ad conum BaC ejusdem baſis erit, ut 3 ad 1, ſive ut 9 ad 3 (b), & recta aA = Ed, adeoque etiam aB = dE (c), propterea quod ſit aB = aA (d), ac demum ES = aB (e) cum poſita fuerit ES = Ed, ſitque Ed = aB. Demonſtravimus porro eodem loco, quadratum lateris aE triplum eſſe quadrati lateris Ea. Ergo, cum quadratum lateris aB ſit æquale quadratis laterum BE, Ea ſimul ſumtis

(a),

(a) Lib. IX. §. 185.
(b) Lib. XIII. §. 50.
(c) Syn. Alg. §. 261.
(d) Lib. IX. §. 19.
(e) Syn. Alg. §. 261.

(a), quadratum lateris B*a*, adeoque etiam lateris SE, eſt ad quadratum lateris BE, ut 4 ad 3. Quamobrem circulus quoque ex radio ES erit ad circulum ex radio *E*B, ut 4 ad 3 (b). Conſtat porro, conum S*a*T eſſe ad conum B*a*C ejusdem axis, ſive altitudinis *aE*, ut circulus ex radio *E*S ad circulum ex radio *E*B (c). Ergo conus S*a*T erit ad conum B*a*C, ut 4 ad 3. Cono autem S*a*T æqualis eſt ſphæra MEN (d). Igitur ſphæra MEN erit ad conum B*a*C, ut 4 ad 3; & quoniam cylindrus FHKG, ut ſupra demonſtravimus, eſt ad ſphæram MEN, ut 6 ad 4, cylindrus FHKG erit ad conum B*a*C, ut 6 ad 3; atque adeo conus BAC ad cylindrum FHKG, ut 9 ad 6; cum ſcilicet oſtenſum fuerit, conum BAC eſſe ad conum B*a*C, ut 9 ad 3. Conus itaque *B*AC eſt ad cylindrum FHKG in ratione *ſeſquialtera*. Ergo, ſi eidem ſphæræ &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

112. Quoniam, ut ſuperiori loco, nimirum §. §. 79, 80. oſtenſum eſt, ſi ſphæræ circumſcribatur conus æquilaterus, & cylindrus, tota ſuperficies coni eſt ad totam ſuperficiem cylindri, & hæc ad ſuperficiem inſcriptæ ſibi ſphæræ in ratione *ſeſquialtera*, manifeſtum eſt, *tria hujuſmodi corpora eſſe in continua ratione ſeſquialtera tam penes integras eorum ſuperficies, quam penes ſoliditatem ſpectata.*

SCHOLION.

113. Diſſimulandum non eſt, Archimedem hoc theorema, quod primus omnium invenit, tanti feciſſe, ut ſphæram cylindro inſcriptam ſuo tumulo apponi juſſerit.

CO-

(a) Lib. VI. §. 37.
(b) Lib. IX. §. 188.
(c) Lib. XIII. §. 44.
(d) §. 104.

COROLLARIUM II.

Sphæra eſt dupla coni recti, cujus baſis ſit maximus ipſius ſphæræ circulus, axis vero ejusdem ſphæræ diameter.

114. Videlicet ſphæra ABCD eſt dupla coni recti LAM habentis pro baſi LM maximum ipſius ſphæræ circulum, pro Fig. 17. Tab. 12. axe vero ejusdem ſphere diametrum AC. Quandoquidem cylindrus NLMP ipſi ſphæræ circumſcriptus eſt ad ipſam ſphæram, ut 3 ad 2 (a). Eſt autem ad conum LAM, ut 3 ad 1 (b). Ergo ſphæra ABCD erit ad conum LAM, ut 2 ad 1, ſcilicet in ratione *dupla*.

COROLLARIUM III.

Hemiſphærium eſt duplum coni eandem cum illo habentis baſim, & altitudinem.

115. Sequitur manifeſte ex præcedenti. Ut enim hemiſphærium eſt pars dimidia integræ ſphæræ, ita conus, cujus baſis eadem ſit cum baſi hemiſphærii, nempe maximus ſphæræ circulus, altitudo vero ejuſdem ſphæræ radius, eſt in ratione *ſubdupla* ad conum, qui circulum itidem ſphæræ maximum pro baſi habeat, diametrum vero ejuſdem ſphæræ pro altitudine; cum coni æqualium baſium ſint directe inter ſe, ut altitudines (c).

THEOREMA XXIV.

Sector ſphæricus eſt æqualis cono recto, cujus baſis adæquat curvam ipſius ſectoris ſuperficiem, axis vero ſphæræ radium.

116. Eſto ſector ſphæricus BACD genitus ex revolutione ſe-

(a) §. 110.
(b) Lib. XIII. §. 31.
(c) Lib. XIII. §. 30.

ſectoris circularis BAD circa axim, ſive radium AD. Ponatur autem conus rectus EDF, cujus baſis EF ſit circulus æqualis curvæ ſuperficiei BAC ipſius ſectoris ſphærici, axis vero AD ſit ſphæræ radius. Dico, ſectorem ſphæricum BACD eſſe æqualem cono EDF. Fig. 19. Tab. 11.

Demonſtratio.

Coincidit cum demonſtratione theorematis XXI. Etenim elementa ſectoris ſphærici BACD ſunt numero, & magnitudine æqualia elementis coni EDF. Sunt enim numero æqualia; quia tot portiones circulares ſphæricarum ſuperficierum ſibi mutuo concentricarum BAC, *rnf*, *ebd*, *gxz* productæ ex revolutione ſimilium arcuum BA, *rn*, *eb*, *gx* ſectoris generatoris BAD, conſtituunt ſoliditatem ſectoris ſphærici BACD, quot circuli ſibi mutuo paralleli EF, *pq*, *am*, *st*, geniti ex revolutione rectarum parallelarum EA, *pn*, *ab*, *sx* conſtituentium triangulum rectangulum EAD, ex quo circa axim AD revoluto gignitur conus EDF, conſtituunt ſoliditatem ipſius coni EDF; cum hujuſmodi elementa tot utrobique ſint, quot puncta in radio AD numerantur. Sunt etiam magnitudine æqualia, alterum alteri, videlicet curva ſuperficies *rnf* circulo *pq*, ſuperficies curva *ebd* circulo *am*, atque ita deinceps. Ut enim circulus EF ad circulum *pq*, ita curva ſuperficies BAC ad curvam ſuperficiem *rnf*; cum tam circulus EF ſit ad circulum *pq* (a), quam curva ſuperficies BAC ad ſuperficiem *rnf* in ratione *duplicata* radii AD ad radium *nD* (b). Poſitus eſt autem circulus EF æqualis curvæ ſuperficiei BAC. Ergo circulus quoque *pq* curvam ſuperficiem *rnf* æquabit (c). Eodem modo circulus *am* oſtendetur æqualis curvæ ſuperficiei *ebd*, &

(a) Lib. IX. §. 181.
(b) Lib. XIII. §. 122.
(c) Lib. I. §. 128.

Digitized by Google

circulus *st* curvæ ſuperficiei *gxz*. Ergo ſector ſphæricus BACD adæquat conum rectum EDF (a); ac proinde ſector ſphæricus &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Sector ſphæricus eſt ęqualis cono recto, cujus axis adęquat radium ſphæræ, radius vero baſeos eſt ęqualis chordę arcus ſectoris genitoris circuli.

117. Sector nimirum ſphæricus BACD æquabit conum
Fig. 19. rectum EDF, ſi hujus axis AD fuerit ſphæræ radius,
Tab. 12. ſemidiameter vero AE baſeos EF fuerit æqualis chordæ AB arcus AB ſectoris circularis BAD, ex quo circa axim, ſive radium AD revoluto, ſector ipſe ſphæricus producitur. Si namque radius AE fuerit æqualis chordæ arcus AB, circulus baſeos coni EDF erit æqualis curvæ ſuperficiei BAC ſectoris BACD (b); adeoque ſector ipſe ſphæricus conum EDF æquabit (c).

COROLLARIUM II.

Sector ſphæricus eſt æqualis cylindro recto, cujus baſeos radius eſt æqualis chordæ arcus ſectoris circuli genitoris, axis vero adæquat tertiam partem radii ipſius ſectoris.

118. Videlicet ſector ſphæricus BACD erit æqualis cy-
Fig. 19. lindro recto, cujus baſeos radius adæquat chordam arcus
Tab. 12. AB ſectoris circuli genitoris BAD, axis vero tertiam partem radii AD. Huic namque cylindro æqualis eſt conus EDF

(a) Lib. IX. §. 53.
(b) §. 84.
(c) §. 116.

EDF (a), quem ſector ipſe ſphæricus BACD adæquat (b).

PROBLEMA XVII.

Soliditatem ſectoris ſphærici dimetiri.

119. Eſto ſector ſphæricus ADCB, cujus ſoliditatem dimetiri oporteat.

Reſolutio.

Determinato ſectore ADB circuli, ex cujus revolutione circa radium DB ſector ipſe ſphæricus producitur, inveniatur valor circuli, cujus radius ſit chorda arcus AD (c), atque hujuſmodi valor per tertiam partem radii DB multiplicetur. Factum erit ſoliditas ſectoris ſphærici ADCB quæſita. Si nimirum valor circuli, cujus radius ſit chorda arcus AD, fuerit $= ab$, & tertia pars radii DB fuerit $= d$; ſoliditas ſectoris ADCB erit $= abd$. Fig. 10. Tab. 12.

Demonſtratio.

Factum quippe abd exprimit valorem cylindri recti; cui ſector ADCB eſt æqualis (d).

(a) §. 94.
(b) § 117.
(c) Lib. X. §. 52.
(d) §. 118.

PROBLEMA XVIII.

Segmenti ſpbærici quantitatem determinare.

I.

120. Dimetiri oporteat ſegmentum ſphæricum ACD minus hemiſphærio.

Reſolutio:

Inveniatur valor ſectoris ſphæriei ABCD; qui curva Fig. 20. Tab. 12. dati ſegmenti ſuperficie ADC terminatur (a). Tum huic valori ſubducatur magnitudo coni recti ABC, cujus latus eſt ſphærę radius AB, diameter vero baſeos eſt chorda maximi arcus ADC dati ſegmenti ſphærici. Quod ex hac ſubductione relinquitur, erit valor ſphærici ſegmenti ACD quæſitus. Ut ſi ſector ſphæricus ABCD fuerit $= abd$, & conus ABC fuerit $= mmr$, ſegmentum ſphæricum ACD erit $= abd - mmr$.

Demonſtratio.

Si enim notus fuerit valor totius, & unius partis, per ſubductionem valor alterius partis in aperto ponitur.

I I.

121. Eſto modo ſegmentum ſphæricum FNG majus hemiſphærio, cujus valorem invenire oporteat.

Re-

(a) §. 119.

Reſolutio.

Inveniatur ſoliditas totius ſphæræ BFNG (a), nec non ſegmenti reſidui FBG (b), iſque a valore totius ſphæræ auferatur Reſiduum dabit valorem ſegmenti FNG. Si nempe ſphæra BFNG ponatur = *abd*, & ſegmentum FBG = *mmr*, ſegmentum majus FNG erit = *abd* — *mmr*. Fig. 13: Tab. 12.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum præcedenti.

(a) §. 119.
(b) §. 120.

F I N I S.

Digitized by Google

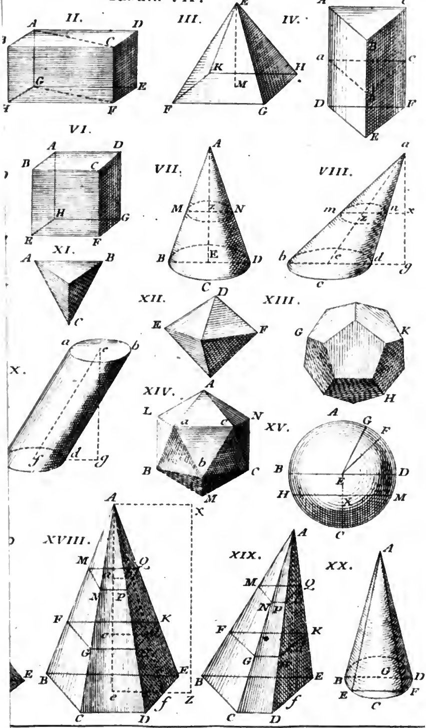
BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Digitized by Google

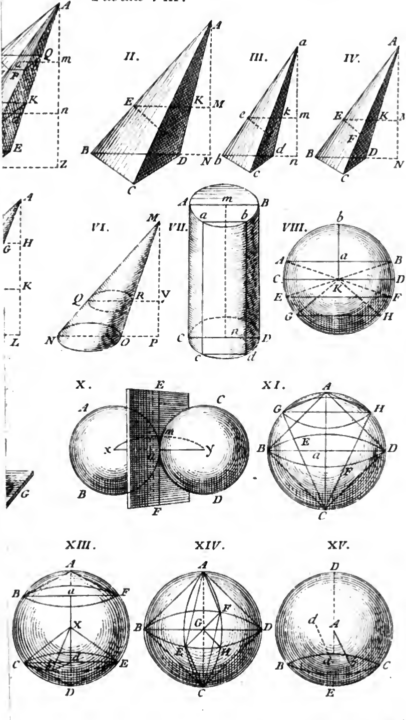
Digitized by Google

Tabula VII.



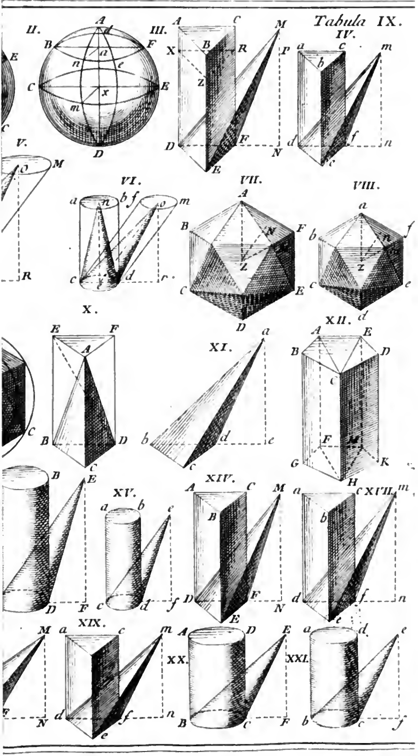
Digitized by Google

Tabula VIII.



Digitized by Google

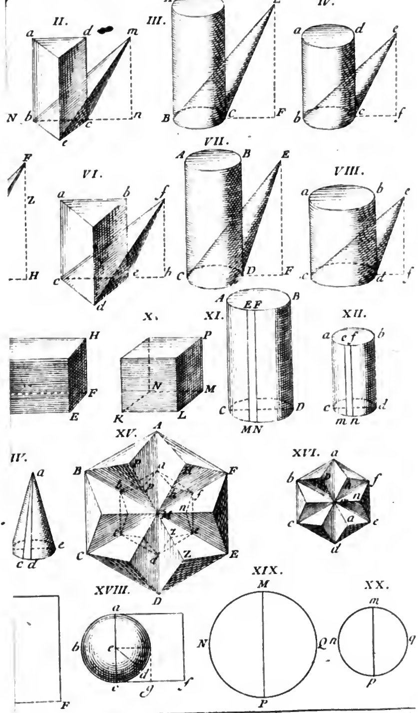
Digitized by Google



Digitized by Google

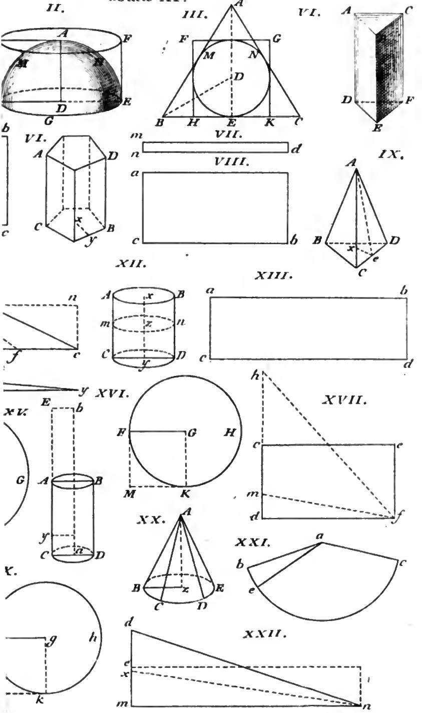
Digitized by Google

Tabula X.

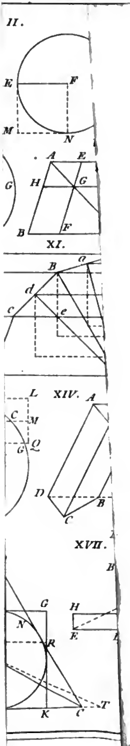


Digitized by Google

Tabula XI.



Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google